

# Neue und alte Thesen über Wavelets

Autor(en): **Buhmann, Martin D.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **51 (1996)**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-46966>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

---

---

## Neue und alte Thesen über Wavelets

---

---

Martin D. Buhmann

Martin D. Buhmann wurde 1963 geboren. Er studierte in Göttingen und später in Cambridge GB, wo er 1989 bei M.J.D. Powell doktorierte. Nach Forschungsaufenthalten in Cambridge, am IBM Research Center in Yorktown Heights und an der University of Wisconsin in Madison wurde er 1994 Assistenzprofessor an der ETH Zürich. In seinen Forschungen beschäftigt er sich mit Wavelets, mit der Approximationstheorie und mit der Numerik von Differentialgleichungen.

### 1 Einführung

Der Zweck dieses Artikels ist, die Theorie der sogenannten Wavelets unter alten und neuen Gesichtspunkten zu beleuchten und dabei insbesondere eine neue Klasse solcher Wavelets vorzustellen. Wavelets ziehen derzeit ausserordentlich viel Interesse auf sich, so dass es in dem Rahmen dieser Arbeit nicht möglich ist, auch nur annähernd alle ihre Aspekte anzusprechen. Eine wesentliche Einschränkung besteht allein darin, dass wir uns nur mit eindimensionalen Wavelets befassen werden. Wir hoffen jedoch, hinreichend Einblick zu geben, damit der Leser die Gründe der Beliebtheit der Wavelets für Anwender

Vermittler und Empfänger von Information – Lehrer und Schüler, Professoren und Studenten zum Beispiel – wissen es sehr gut: Jede Information enthält wichtige und unwichtige Anteile. Auch bei einer Porträtaufnahme eines Filmstars interessiert der Hintergrund des Bildes wesentlich weniger als die Details des Gesichtsbereiches. Muss ein solches Bild mit beschränkter Kapazität übermittelt werden, so sind Verfahren wünschbar, die automatisch die als *wichtig* betrachteten Anteile erkennen und diese mit *grösserer Genauigkeit* behandeln. In den *Wavelets* hat man seit einigen Jahren ein Werkzeug in der Hand, welches prinzipiell gerade dieses automatische Herausfiltern des wichtigen Anteils (im obigen Beispiel den Gesichtsbereich) oder des unwichtigen Anteils (im obigen Beispiel den Hintergrund) aus der gesamten Information möglich macht. Die Anwendungen der Wavelets sind bereits heute ausserordentlich vielfältig, sie reichen von der Datenkompression bei Videobildern bis zur "Reinigung" von alten Audioaufnahmen von unerwünschten Kratzgeräuschen. Sie bilden eines der vielen mathematischen Werkzeuge, die in Anwendungen zu Riesenfortschritten geführt haben. – Der Beitrag von Martin Buhmann ist aus der Antrittsvorlesung entstanden, die er im Sommersemester 1995 an der ETH Zürich gehalten hat. *ust*

und Analytiker sieht und sich vielleicht sogar selbst entschliesst, Wavelets näher zu studieren.

Wavelets dienen der Zerlegung, Bearbeitung und Analyse von Funktionen und Signalen. Letztere können z.B. Ton- oder Bildsignale sein, die gefiltert werden sollen, um Störungen, wie etwa ein Rauschen, zu beseitigen, oder die zerlegt, auf ihre wesentlichen Bestandteile reduziert und – dergestalt komprimiert – später oder an einem anderen Ort zusammengesetzt werden sollen. Insbesondere bei Bildern ist solch eine Kompression, d.h. Verdichtung, der Information, die das Bild vollständig oder mit guter Annäherung beschreibt, oft notwendig zum Zweck der schnellen Übertragung (Bildtelefon) oder Abspeicherung (speichereffiziente Aufzeichnung grosser Datenmengen). Wavelets sind die Bausteine, in die die Signale oder Funktionen zerlegt werden, und anhand derer dann entschieden wird, welche Teile der Zerlegung unerwünscht (Filterung) oder entbehrlich (Datenverdichtung) sind, deswegen fortgelassen werden sollen und bei der späteren Rekonstruktion unberücksichtigt bleiben. Offensichtlich ist es besonders wichtig, ein schnelles und stabiles numerisches Verfahren zu haben, um zu zerlegen und zu rekonstruieren, damit die dem Mathematiker zur Verfügung stehenden Wavelets in der Praxis gebraucht werden können.

Viele der obigen Aspekte weisen bereits auf eine andere, ältere Methode für die gleichen Anwendungen hin, nämlich die Fourierzerlegung. Wir wollen daher nun einen Schritt zurückgehen und die Fourierzerlegung (oder -transformation) beschreiben, die als Vorläufer der Waveletzerlegung betrachtet werden kann.

Sei dazu  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion (ein eindimensionales Signal) endlicher Energie, d.h.

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \iff \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty .$$

Dann ist das Integral

$$\hat{f}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

überall bis auf eine Menge mit verschwindendem Mass wohldefiniert, und  $\hat{f}$  hat auch endliche Energie (speziell:  $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_2$ ). Man nennt  $\hat{f}$  die Fouriertransformierte von  $f$ , und  $\hat{f}(x)$  repräsentiert den Anteil der "Frequenz"  $x$  an der Funktion  $f$ . Die Bedeutung dieser Aussage wird unmittelbar klar, wenn man bedenkt, dass die Umkehrung

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \hat{f}(x) dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

fast überall gilt, die zeigt, dass  $f$  wieder aus allen seinen Frequenzbestandteilen zusammengesetzt werden kann. Die Bausteine hier sind also  $t \mapsto e^{ixt}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , die Exponentialfunktionen zur Frequenz  $x$ . In der Anwendung benutzt man natürlich diskrete Frequenzen  $\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots$ , und es ist ein fundamentaler Satz der harmonischen Analysis, dass  $x_j = j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , genügen, um alle periodischen Funktionen endlicher Energie, die auf  $[-\pi, \pi]$  definiert sind, eindeutig bis auf einer Menge mit Mass 0 darzustellen,

und zwar mit Koeffizienten  $\hat{f}_j$  ebenfalls endlicher Gesamtenergie, d.h.

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_j|^2 < \infty .$$

Die Berechnung jener Koeffizienten erfolgt effizient mit der schnellen Fouriertransformation (FFT [20]), und anschliessend an diese Berechnung kann das Signal gefiltert werden (z.B. werden alle Koeffizienten hoher Frequenzen annulliert) oder komprimiert werden (z.B. werden alle Koeffizienten, die betragsmässig kleiner als eine bestimmte Fehlertoleranz sind, ignoriert). Die Wiederherstellung des Signals erfolgt im Wesentlichen auf die gleiche Art wie seine Zerlegung in die Koeffizienten, denn (1) und die Umkehrformel haben fast die gleiche Form.

Wie aus (1) ersichtlich, muss zur Berechnung von  $\hat{f}$  (oder auch  $\hat{f}_j$ ) stets das gesamte Signal bzw. die Funktion über ihren Definitionsbereich bekannt sein, weswegen sich die Fouriertransformation speziell für stationäre oder periodische Signale eignet. Weil  $|e^{ixt}| \equiv 1$ , lokalisiert sie weiterhin nicht bezüglich der Zeit  $t$ , d.h. das Auftreten einer bestimmten Frequenz und deren Intensität können festgestellt werden, nicht aber die Zeit  $t$ , zu welcher sie im Signal  $f$  enthalten ist. Diese beiden Hauptnachteile der Fourierzerlegung, nämlich Anwendbarkeit nur auf stationäre Signale und fehlende Lokalität bezüglich der Zeit, sucht die Wavelettransformation zu beheben, und wir werden diese neue Transformation im nächsten Abschnitt beschreiben.

Diese Neuentwicklung ist ganz und gar nicht nur von theoretischem Interesse: Die Wavelettransformation hat bereits eine grosse Menge von praktischen Anwendungen gefunden. Insbesondere gilt dies für ihre Diskretisierung, die diskrete Wavelettransformation, welche in Analogie zur Fast Fourier Transform oft "Fast Wavelet Transform" genannt wird. Sie wird zum Beispiel angewendet, um sehr grosse Karteien von Bilddaten zu komprimieren und elektronisch abzuspeichern, um Bilddaten ohne grossen Qualitätsverlust in Echtzeit über lange Distanzen zu übermitteln, um Singularitäten in Signalen zu finden und gegebenenfalls herauszufiltern oder um Muster in Bildern automatisch zu erkennen. Weitere Anwendungen sind Rekonstruktion historischer Photographien oder solcher, die aus wissenschaftlichen Experimenten unscharf oder sonst irgendwie beeinträchtigt hervorkommen. Allen diesen sehr praktischen Anwendungen ist gemeinsam, dass eine Filterungs- oder Kompressionsmethode gefragt ist, die sich verschiedenen Frequenzen zu verschiedenen Zeiten anzupassen vermag und auf diese Art berücksichtigen kann, dass es z.B. in einem Portrait an manchen Orten im Hintergrund über einen grossen Bereich kaum speicherungswürdige Information gibt, während es woanders viel Detail gibt, das durch zahlreiche Koeffizienten in der Entwicklung getreu repräsentiert werden muss. Speziell Konturen in einem Bild verlangen genaue Wiedergabe, weil sich das menschliche Auge besonders anhand dieser orientiert. Während die Fouriertransformation von vornherein weniger für alle diese Zwecke geeignet ist, weil sie nicht lokal ist, ist es vor allem die Fast Wavelet Transform, die durch einfache, diskrete Faltungen der Koeffizientenvektoren einer ersten Approximation des Signals die Waveletzerlegung zu berechnen erlaubt, die den Wavelets den entscheidenden Vorteil in der Praxis gibt.

## 2 Die Wavelettransformation

Die "Bausteine", die der Wavelettransformation zu Grunde liegen, sind oszillierende, quadratintegrierbare Funktionen (also *kleine Wellen*), die lokal sind und durch Verschiebung und Skalierung verschiedene Frequenzen *zeitabhängig* abtasten können. Eine typische Waveletfunktion ist das Haar-Wavelet, so benannt nach dem Haarschen Mass, aus dem es hergeleitet wurde:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion  $\psi$  hat verschwindendes Integral über  $\mathbb{R}$ , oszilliert also. Sie ist lokal, weil sie sogar kompakten Träger hat. Die Wavelettransformation ist für dieses oder ein allgemeines, quadratintegrierbares  $\psi$  und  $f \in L^2(\mathbb{R})$  erklärt durch

$$Wf(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad b \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Im Gegensatz zur Fouriertransformation treten hier also zwei Parameter auf. Durch  $a$  wird  $\psi$  skaliert, oszilliert also schneller (wenn  $a < 1$ ) oder langsamer (wenn  $a > 1$ ), und mittels  $b$  wird es gleichzeitig entlang der reellen Achse verschoben. Im Vergleich zur Fouriertransformation ersetzt  $\psi$  die Exponentialfunktion, und es ist nun das Ziel,  $f$  auf ähnliche Weise aus seiner Wavelettransformierten zu rekonstruieren und einen der FFT verwandten Algorithmus zur Verfügung zu stellen.

Beide Ziele können leichter erreicht werden, indem wir fordern, dass

$$\{2^{k/2}\psi(2^k \cdot -j) \mid k, j \in \mathbb{Z}\}$$

eine orthonormale Basis von  $L^2(\mathbb{R})$  bildet, denn dann gilt

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{k/2} Wf(2^{-k}, 2^{-k}j) \psi(2^k \cdot -j) \quad (2)$$

für alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Es sind also die diskreten Auswertungen  $Wf(2^{-k}, 2^{-k}j)$  der Wavelettransformation die Koeffizienten der Entwicklung. Die Darstellung (2) erfüllt einerseits unser Anliegen,  $f$  in verschiedene Frequenzbestandteile zu zerlegen (so geschehen durch die Skalierung mit  $2^k$ ), und zwar lokal bezüglich der Zeitachse. Das wird garantiert durch die Verschiebung mit  $j$  und die Lokalität von  $\psi$ , die für das Haar-Wavelet besonders eklatant ist, aber auch für die später vorzustellenden Wavelets gilt. Andererseits genügt sie der Forderung nach einem schnellen Algorithmus; denn die  $Wf(2^{-k}, 2^{-k}j)$  können schnell, rekursiv mit der Fast Wavelet Transform berechnet werden. Es ist aus diesen Gründen üblich,  $\psi$  nur dann ein Wavelet zu nennen, wenn  $\{2^{k/2}\psi(2^k \cdot -j) \mid k, j \in \mathbb{Z}\}$

eine orthonormale Basis bildet. Wir wollen uns an diese Konvention halten. Warum verlangen wir Orthogonalität? Die Orthogonalität

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^k t - j) \overline{\psi}(2^{k'} t - j') dt = 0, \quad \forall k \neq k', j \neq j',$$

erinnert an die Orthogonalität der Exponentialfunktionen

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt} e^{-ij't} dt = 0, \quad \forall j \neq j',$$

und erfüllt in der Tat ähnliche Aufgaben wie bei der Fourieranalyse periodischer Funktionen.

Sie ist nämlich wesentlich für das effiziente Funktionieren der FFT, und das gleiche gilt für die FWT, die Fast Wavelet Transform, die aus Platzgründen hier nicht näher beschrieben wird. Anstatt einer ausführlichen Besprechung in diesem Artikel wird auf die hervorragende Beschreibung in [9] verwiesen und auf die kurze Darstellung eines Spezialfalles der FWT in Abschnitt 3. Aber wir gehen näher auf eine andere Aufgabe der Orthogonalität ein. Sie garantiert, dass die Zerlegung in (2) stabil ist, d.h. dass die Grösse eines Koeffizienten der Zerlegung an der Stelle  $j2^{-k}$  bei "Frequenz"  $2^k$  tatsächlich das Verhalten von  $f$  an dieser Stelle quantitativ darstellt. Insbesondere ist die Quadratsumme der Koeffizienten gleich einem konstanten Vielfachen der Energie zum Quadrat von  $f$ . Weil Orthogonalität nur bezüglich  $k$  für ein Funktionieren der FWT ausreicht und die eben besprochene Stabilität auch erfüllt ist, falls für alle  $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ,  $c = (c_j)_{j=-\infty}^{\infty}$ , die *Rieszsche Bedingung*

$$\lambda \|c\|_2 \leq \left\| \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \psi(2^k \cdot -j) \right\|_2 \leq \Lambda \|c\|_2, \tag{3}$$

gilt, wobei  $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$  unabhängig von  $k$  und  $c$  sind, lässt man die Bedingung  $\forall j \neq j'$  in der Orthogonalitätsbedingung oft aus, fordert stattdessen (3) und dass  $L^2(\mathbb{R})$  von den  $\psi(2^k \cdot -j)$  erzeugt wird. Man spricht dann von Prä-Wavelets. Hierbei bezeichnet  $\|\cdot\|_2$  sowohl die Norm auf  $\ell^2(\mathbb{Z})$  als auch auf  $L^2(\mathbb{R})$ , je nach Argument.

Wir werden uns in diesem Artikel von nun an nur noch mit Prä-Wavelets befassen. Es ist anzumerken, dass die Darstellung (2) andere Koeffizienten hat, wenn  $\psi$  nur ein Prä-Wavelet ist, was aber Nutzen und Berechenbarkeit der Darstellung keinen Abbruch tut. Es soll ferner hervorgehoben werden, dass in der Praxis nur ein endlicher Teil von (2) berechnet wird.

Das Haar-Wavelet ist das einfachste Beispiel sogenannter Spline (Prä-)Wavelets, die aus stückweisen Polynomen bestehen und eine besonders zweckmässige Klasse von (Prä-)Wavelets sind. Wir werden weitere Beispiele geben. Warum sind Spline Prä-Wavelets nützlich? Eine Zerlegung (2) von glatten Funktionen ist umso geeigneter, sagen wir für die Kompression einer Funktion, je weniger Koeffizienten gebraucht werden, um sie in einer endlichen Summe nahezu getreu darzustellen. Es gibt aber eine reiche Theorie der Splines ([18] z.B.), die zeigt, dass glatte Funktionen in der Tat effizient durch Splinefunk-

tionen approximiert werden können. Daher sind diese Räume besonders für Prä-Wavelets geeignet. Ein weiterer Grund ist, dass Spline Prä-Wavelets einfache Darstellungen haben, die auch leicht in numerischen Verfahren implementiert werden können. Ein stückweise lineares Prä-Wavelet sieht so aus:

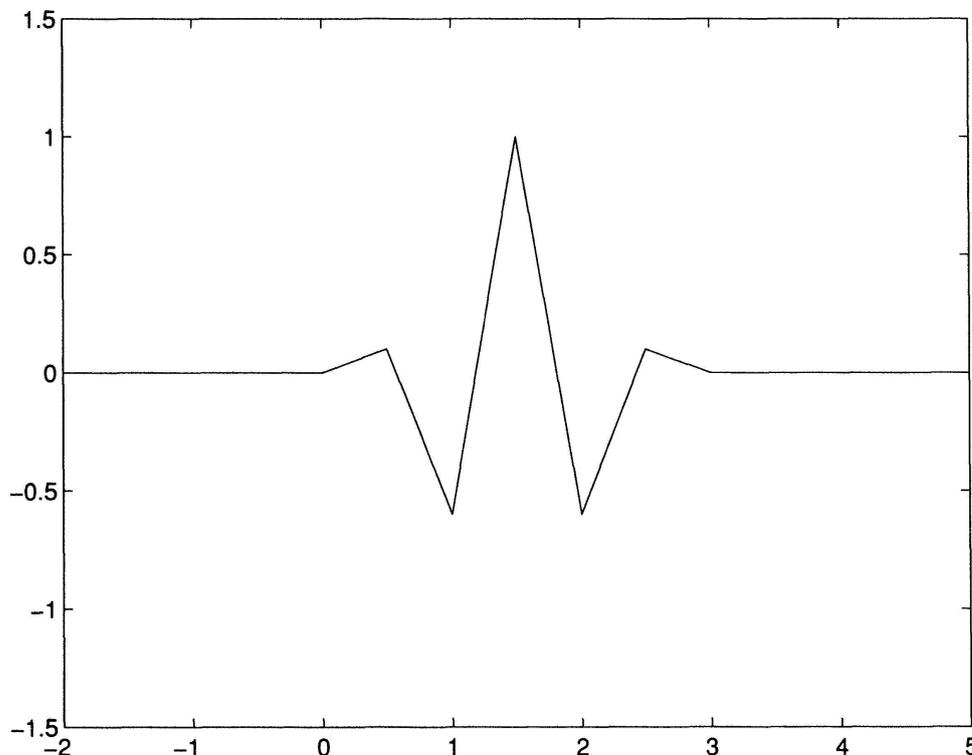


Fig. 1 Stückweise lineares Prä-Wavelet

Spline Prä-Wavelets können mehrfach stetig differenzierbar sein, brauchen aber nicht in  $C^\infty(\mathbb{R})$  zu liegen. Es wird bei Splines gefordert, dass sie in  $C^{k-1}(\mathbb{R})$  sind, wenn sie stückweise Polynome vom Grad  $k$  sind. Es existieren Spline Prä-Wavelets von beliebigem Grad mit kompaktem Träger. Sie können mit einer expliziten Formel angegeben werden [9]. Viele andere wichtige Klassen von (Prä-)Wavelets existieren, siehe [8,9,11–16] und insbesondere die Daubechies Wavelets [11]. Im nächsten Abschnitt zeigen wir, wie Spline Prä-Wavelets *regularisiert* werden können, damit sie  $C^\infty$  sind.

Wir stellen hier nur noch die Daubechies Wavelets vor, die besonders oft verwendet und in der Literatur besprochen werden. Ihre Konstruktion basiert auf der Existenz einer Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger, die die sogenannte Verfeinerungsgleichung

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^N h_k \varphi(2x - k), \quad x \in \mathbb{R},$$

für geeignete reelle Koeffizienten  $h_k$  erfüllt und quadratintegrierbar ist. Wenn die ganzzahligen Translate von  $\varphi$  nämlich ausserdem orthonormal sind, ist

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1-N}^1 (-1)^k h_{1-k} \varphi(2x - k), \quad x \in \mathbb{R},$$

ein Wavelet mit kompaktem Träger [11]. Für das Daubechies Wavelet beginnt man mit der Wahl eines trigonometrischen Polynoms  $q(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \alpha_k \cos(2k - 1)x$  und eines anderen  $H(x) = \sum_{k=0}^N h_k \exp(ikx)$  mit reellen Koeffizienten derart, dass  $q = |H|^2$ . Dann muss eine Lösung der Verfeinerungsgleichung berechnet werden. Das Resultat ist ein orthogonales Wavelet  $\psi$  mit kompaktem Träger, das Daubechies Wavelet  $D_N$ . Die Funktion  $\varphi$  kann beispielsweise dadurch berechnet werden, dass man ihre Fouriertransformierte durch das unendliche Produkt

$$\hat{\varphi}(x) = \prod_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}x), \quad x \in \mathbb{R},$$

bestimmt. Bei der Wahl von  $H$  muss natürlich besonderes Augenmerk auf die Konvergenz dieses Produkts gerichtet werden.

### 3 Neue Klassen von Prä-Wavelets

In diesem Abschnitt werden wir eine neue Klasse von Prä-Wavelets vorstellen, die zu effizienter Zerlegung von Funktionen geeignet sind. Im einfachsten Fall sind sie eine Verallgemeinerung der im letzten Abschnitt beschriebenen linearen Prä-Wavelets. Jene können nämlich als Linearkombinationen der stückweise linearen Funktionen  $|\cdot - \frac{1}{2}j|$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , dargestellt werden, und wir befassen uns nun mit Linearkombinationen von

$$\sqrt{(\cdot - \tau j)^2 + c^2}, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

wobei  $\tau \in (0, 1]$  die Verschiebungslänge, z.B.  $\tau = \frac{1}{2}$ , und  $c$  ein fester nichtnegativer Parameter ist. Die Funktion (4) ist für  $c = 0$  wieder obige Betragsfunktion, die bei  $\frac{1}{2}j$  keine stetige Ableitung besitzt, während sie für  $c > 0$  in  $C^\infty(\mathbb{R})$  ist. Daher rührt das Interesse an (4), denn glatte Funktionen können gut mit glatten Wavelets zerlegt werden, wobei trotzdem auch für weniger glatte oder singuläre Funktionen durch die Skalierung, also lokale detailreiche Approximation, Sorge getragen wird. Potenzen von (4) entsprechen übrigens Splines höherer Ordnung, so ist  $((\cdot - \tau j)^2 + c^2)^{3/2}$  etwa eine Regularisierung von dem kubischen Spline  $|\cdot - \tau j|^3$ . Die Funktionen (4) heissen ‘‘Multiquadric-Funktionen’’, und ihre den Splines ähnlichen Approximationseigenschaften in einer Dimension werden z.B. in [1] und [3] untersucht. Es gibt Verallgemeinerungen auf höhere Dimensionen, die besonders interessante Approximationseigenschaften haben [4], deren Besprechung allerdings den Rahmen unserer Ausführungen hier leider sprengen würde. Die Größen  $\tau j$ , um die die Funktionen verschoben sind, werden üblicherweise als Zentren oder Stützstellen bezeichnet.

Der Aufsatz [5] gibt Auskunft über die Existenz und die Eigenschaften von Multiquadric Prä-Wavelets. Dazu ist es hilfreich, einige vereinfachende Notationen einzuführen. Wir schreiben von nun an

$$\phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2},$$

und weiterhin sei  $\Psi_\ell(x) = \phi[-\ell\tau, 0, \ell\tau](x)$  die zweite dividierte Differenz von  $\phi(x - \cdot)$  an den Punkten  $-\ell\tau, 0, \ell\tau$ , wobei  $\ell \in \mathbb{R}$  und  $\ell > 0$ .

In dem Aufsatz werden Linearkombinationen  $\psi$  von Multiquadric Funktionen mit (Translations-) Schrittweite  $\tau$  gebildet, die zu jenen mit doppelter Schrittweite orthogonal sind und die Differenz der beiden von den unterschiedlich translatierten Multiquadric Funktionen aufgespannten Räumen erzeugen. Wir bezeichnen jene beiden linearen Räume mit  $V_0$  bzw.  $V_1$  und die Differenz mit  $W_0$ :

$$V_j = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \Psi_{2^{1-j}}(\cdot - 2^{1-j}k\tau) \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2 < \infty \right\}, \quad (5)$$

$$W_0 = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \psi(\cdot - 2k\tau) \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2 < \infty \right\}.$$

Es gilt für das Prä-Wavelet  $\psi \in V_1$ ,  $\psi \perp V_0$ ,  $W_0 \perp V_0$  und

$$V_1 = V_0 + W_0. \quad (6)$$

Man kann diese Zerlegung rekursiv zu

$$V_k = W_{k-1} + W_{k-2} + \dots + W_0 + V_0 \quad (7)$$

erweitern, wobei  $V_k$  und  $V_0$  durch (5) definiert sind und die  $W_0, W_1, \dots, W_{k-2}, W_{k-1}$  die entsprechenden orthogonalen Differenzräume sind. In der Darstellung (7) sind die  $W_j$ 's genau die Räume, die von den in [5] beschriebenen Prä-Wavelets (stabil, s. die Bemerkungen in [4] und [5]) erzeugt werden und somit einen endlichen Teil der gewünschten Zerlegung in Wavelet-Komponenten geben, wobei  $V_0$  ein Restglied (das sogenannte "blurred signal") enthält und  $V_k$  der Raum mit der kleinsten Schrittweite ist, aus dem wir eine zu zerlegende Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  zunächst approximieren, bevor wir mit der Dekomposition beginnen.

Aufgrund der geeigneten Wahl der  $\Psi_\ell$  können nämlich, für gegebenes  $f \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\epsilon > 0$ ,  $k$  und  $\tilde{g}_k \in V_k$  mit  $\|f - \tilde{g}_k\|_2 < \epsilon$  gefunden werden. Anschliessend kann  $\tilde{g}_k$  in

$$\tilde{g}_k = g_{k-1} + g_{k-2} + \dots + g_0 + \tilde{g}_0 \quad (8)$$

zerlegt werden, wobei  $g_j \in W_j$  und  $\tilde{g}_0 \in V_0$ , gemäss (7). Diese Zerlegung findet schrittweise statt, d.h. man beginnt mit

$$\tilde{g}_k = g_{k-1} + \tilde{g}_{k-1}, \quad \tilde{g}_{k-1} \in V_{k-1},$$

und setzt  $\tilde{g}_k = g_{k-1} + g_{k-2} + \tilde{g}_{k-2}, \quad \tilde{g}_{k-2} \in V_{k-2},$

fort, usw. Das Ergebnis (8) ist genau die Zerlegung, die einem endlichen Teil von (2) plus das "blurred signal"  $\tilde{g}_0$  entspricht. Man muss für unsere Prä-Wavelets fragen, wie in jedem Schritt  $g_j$  und  $\tilde{g}_j$  bzw. ihre Koeffizienten berechnet werden (damit sind die Koeffizienten bezüglich der Prä-Wavelets, die  $W_j$  erzeugen, also diejenigen bezüglich der Translate von  $\Psi_{2^{1-j}}$  gemeint). Es handelt sich in jedem Zerlegungsschritt nur um eine Multiplikation von Koeffizienten in  $V_j$  mit geeigneten (bi-infiniten) Matrizen, um

zu den Koeffizientenvektoren in  $V_{j-1}$  und  $W_{j-1}$  zu kommen. Im Wesentlichen wird auf diese Weise die FWT beschrieben. Es lässt sich übrigens zeigen, dass die Einträge der genannten Matrizen kubisch abklingen und daher die Fehler, die sich durch das notwendige Abschneiden der unendlichen Summen ergeben, kontrollierbar bleiben.

Prä-Wavelets, die beispielsweise  $f \in L^2([0, 1])$ , also ein auf einem kompakten Intervall definiertes  $f$ , zu zerlegen vermögen, sind auch von Interesse. Wir werden einen möglichen Ansatz nur kurz beschreiben; er beruht auf der Tatsache, dass mittels Multiquadric-Funktionen auch stetige Funktionen auf  $[0, 1]$  beliebig nahe approximiert werden, wobei nur Zentren der Multiquadric-Funktionen innerhalb oder nahe bei  $[0, 1]$  verwendet werden.

Man kann also auch  $f \in L^2([0, 1])$  durch  $\tilde{g}_k \in V_k$  mit genügend grossem  $k$  hinreichend nahe approximieren. Dann kann  $f$  wie vorher zerlegt werden, denn die Basisfunktionen der genannten Approximation sind die gleichen wie oben. Hierbei sind zwei Bemerkungen angebracht. Erstens sichert eine Abklingeigenschaft der Prä-Wavelets, dass die Zerlegung weiterhin im Intervall  $[0,1]$  konzentriert bleibt. Zweitens ist die Näherung für  $x \in [0, 1]$  *unabhängig* von den Stützstellen ausserhalb von  $[0,1]$ . Mehr sogar: man kann die hier und zuvor verwendeten dividierten Differenzen auf allgemeinen, nicht notwendig äquidistanten Stützstellen basieren lassen und erhält dann  $\Psi$ 's und Prä-Wavelets auf nicht gleichmässig verteilten Stützstellen. Dabei wird die Rolle von  $\tau$  durch die maximale bzw. minimale Schrittweite der neuen, beliebig verteilten Stützstellen übernommen. Auf dieser Idee basieren die Artikel [8,5], bei denen Spline Prä-Wavelets und Multiquadric Prä-Wavelets auf nicht äquidistanten Stützstellen eingeführt und analysiert wurden. Diese zu besprechen, würde im Rahmen dieser Arbeit zu weit führen.

Es gibt viele andere sinnvolle Verallgemeinerungen dieser Prä-Wavelets, genannt seien die aus [7], welche Orthogonalität bezüglich innerer Produkte vom Sobolev-Typ aufweisen, d.h. im einfachsten Falle

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) g'(x) dx, \quad \lambda > 0,$$

wobei  $f, g, f'$  und  $g'$  quadratintegrierbar sein sollen. Diese sind nützlich, um nichtlineare hyperbolische Differentialgleichungen mittels Spektralmethoden numerisch zu lösen, denn die entstehenden Steifigkeitsmatrizen aus dem Galerkin-Ansatz sind bei einer dem Differentialoperator korrespondierenden Wahl des inneren Produkts trivial [7].

Es soll noch bemerkt sein, dass für die Berechnung der Zerlegung einer quadratintegrierbaren Funktion die Form des Prä-Wavelets eigentlich selbst keine Rolle spielt. Es sind vielmehr die Koeffizienten aus (2) wichtig. Dennoch können beispielsweise die Multiquadric Prä-Wavelets leicht direkt berechnet werden. Sie sind von der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{2\ell} \Psi_k^*(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei  $\Psi_k^* = \phi[-2\tau, -\tau, 0, \tau, 2\tau]$  eine vierte dividierte Differenz ist und  $(d_k^\ell)_{k,\ell=-\infty}^\infty$  die Einträge der Inversen der Matrix

$$D = (\phi * \Psi_k^*(\tau\ell))_{k,\ell=-\infty}^\infty$$

sind, wobei  $*$  Faltung bedeutet.

#### 4 Weitere Beispiele, offene Fragen und abschliessende Bemerkungen

Viele neue Anwendungen von Wavelets und Prä-Wavelets sind denkbar, und viele werden fast täglich entdeckt. Zu denken ist beispielsweise an medizinische Anwendungen in der Tomographie, wo auf Röntgen- oder Kernresonanzbildern Singularitäten, die in der Form von Tumoren u.ä. auftreten, identifiziert werden sollen. In einer technischen Anwendung ist es notwendig, beim angestrebten automatisierten Ablesen der Postleitzahlen von Paketen Störungen wie z.B. Paketschnüre, die das Adressfeld überqueren, aus dem Bild auszufiltern. Alle Anwendungen, die bereits in der Einleitung erwähnt wurden, lassen Erweiterungen zu. Beispielsweise kann die Datenkompression auch auf die Verdichtung der Information in einer grossen Steifigkeitsmatrix, die bei der numerischen Lösung einer partiellen Differentialgleichung auftritt, bezogen werden. Filterungsaufgaben treten bei Anwendungen von der Übertragung analog gespeicherter Musikaufnahmen bis zur Verbesserung der Bildqualität der Übertragungen des Hubbleteleskops oder anderer astronomischer, etwa durch atmosphärische Störungen verschlechterter Bilder auf. Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen bietet ein weites Feld der Anwendung für Wavelets, da die Dilatationen und Translate wegen ihrer Adaptationsfähigkeit gut als Erzeugende der der numerischen Lösung unterliegenden Räume geeignet sind.

Offene Fragen über Wavelets, die die Mathematiker beschäftigen, beziehen sich in erster Linie auf mehrdimensionale Wavelets und Prä-Wavelets. Es wurden vor allem mehrdimensionale (Prä-)Wavelets in der Literatur diskutiert, die auf Gitterstützstellen definiert sind, aber die Frage nach der Existenz auf beliebig verteilten Stützstellen ist für mehr als eine Dimension noch weit offen. Dabei ist besonders zu beachten, dass in mehreren Dimensionen selbst bei äquidistanten Stützstellen nicht mehr ein (Prä-)Wavelet genügt, das dann entlang dem Gitter verschoben wird, sondern mehrere (im einfachsten Falle der Skalierung aller Komponenten mit 2 sind es  $2^n - 1$ , wobei  $n$  die Dimension des unterliegenden Raumes ist) gefunden werden müssen. Besondere Schwierigkeiten ergeben sich, wenn auf beschränkten Mengen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  statt auf dem ganzen Raum gearbeitet werden soll, weil schon der der Zerlegung vorausgehenden Approximation, die im Falle von  $n = 1$  noch recht einfach war, spezielle Beachtung geschenkt werden muss. Umso schwieriger ist die Konstruktion geeigneter (Prä-)Wavelets für diesen Fall.

Als mögliche Verallgemeinerungen des ein- oder mehrdimensionalen Ansatzes seien nur die Multiwavelets, die Wavelet-Packets [9] und die Windowed Radon Transformation genannt. Obwohl also in den Anwendungen bereits viel und erfolgreich mit Wavelets gearbeitet wird, ist der Bereich der Theorie und mathematischen Analyse bei weitem noch nicht ausgeschöpft. Es sei bei allen diesen Erweiterungsmöglichkeiten nur beispielhaft erwähnt, dass Wavelet-Packets die Zerlegung (8) dahingehend weiterverarbeiten, dass nicht nur für  $W_0$  orthogonale Basen gefordert werden, sondern dass auch der "Rest" in  $V_0$  orthogonal zerlegt werden soll. Dabei sei noch darauf hingewiesen, dass sowohl aus Prä-Wavelets als auch aus Basen in  $V_0$ , die die Riesz-Stabilitätsbedingung erfüllen, Orthonormalsysteme durch Gram-Schmidt Orthogonalisierung gewonnen werden können. Alternativ kann man auch ohne orthonormale Systeme  $\psi(2^k \cdot -j)$  eine Zerlegung (2) haben, indem man bi-orthogonale Wavelets berechnet, wo der  $Wf$ -Anteil in (2) von einem Biorthonormalsystem zu den  $\{2^{k/2}\psi(2^k \cdot -j) \mid k, j \in \mathbb{Z}\}$  abhängt.

Es sollte zum Abschluss dieses Artikels hervorgehoben werden, dass er nicht den Anspruch erhebt, eine vollständige oder endgültige Sicht der Wavelets anzugeben. Weit davon entfernt! Wie bereits am Anfang des Artikels erwähnt, ist die derzeitige Entwicklung viel zu rasant, als dass man mehr als einen kleinen Einblick in einem kurzen Aufsatz geben kann, zumal mehrdimensionale Theorie vollständig ausser Acht gelassen wurde und des Autors persönliche Sicht als Approximationstheoretiker und im Hinblick auf Anwendungen gegeben wurde. Der geneigte Leser fasse dieses vielleicht als Ansporn auf, die zitierte und andere Literatur zu Rate zu ziehen und die vielen anderen Sichtweisen zu erfahren.

## Literatur

- [1] Beatson, R.K. und M.J.D. Powell, "Univariate multiquadric approximation: quasi-interpolation to scattered data", *Constructive Approximation* 8 (1992), 275–288.
- [2] de Boor, C., R.A. DeVore und A. Ron, "On the construction of multivariate (pre) wavelets", *Constructive Approximation* 9 (1993), 123–166.
- [3] Buhmann, M.D., "Convergence of univariate quasi-interpolation using multiquadrics", *IMA J. Numerical Analysis* 8 (1988), 365–383.
- [4] Buhmann, M.D., "Discrete least-squares approximation and pre-wavelets from radial function spaces", *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 114 (1993), 533–558.
- [5] Buhmann, M.D., "Multiquadric pre-wavelets on non-equally spaced knots in one dimension", *Math. Comp.* 64 (1995), 1611–1625.
- [6] Buhmann, M.D., "Pre-wavelets on scattered knots and from radial function spaces: a review", in: *Mathematics of Surfaces VI*, herausgegeben von G. Mullineux, IMA Conf. Proc. Ser., Oxford University Press, Oxford 1996, 309–324.
- [7] Buhmann, M.D., A. Iserles, S.P. Nørsett und J.M. Sanz-Serna, "Sobolev-orthogonal functions and spectral methods", in Vorbereitung.
- [8] Buhmann, M.D. und C.A. Micchelli, "Spline pre-wavelets for non-uniform knots", *Numerische Mathematik* 61 (1992), 455–474.
- [9] Chui, C.K., "An Introduction to Wavelets", Academic Press, Boston 1992.
- [10] Dahmen, W. und C.A. Micchelli, "On stationary subdivision and the construction of compactly supported orthonormal wavelets", in: *Multivariate Approximation and Interpolation*, herausgegeben von K. Jetter und W. Haussmann, Birkhäuser, Basel 1990, 69–89.
- [11] Daubechies, I., "Ten Lectures on Wavelets", SIAM-CBMS Lecture Notes 61, Philadelphia 1992.
- [12] DeVore, R.A. und B. Lucier, "Wavelets", *Acta Numerica* 1 (1992), 1–56.
- [13] Feichtinger, H.G. und K. Gröchenig, "Gabor Wavelets and the Heisenberg group: Gabor expansions and short time Fourier transform from the group theoretical point of view", in: *Wavelets*, herausgegeben von C.K. Chui, Academic Press, Boston 1992, 359–397.
- [14] Louis, A.K., P. Maass und A. Rieder, "Wavelets", Teubner, Stuttgart 1994.
- [15] Meyer, Y., "Ondelettes et Opérateurs", Hermann, Paris 1990.
- [16] Micchelli, C.A., "Using the refinement equation for the construction of pre-wavelets", *Numer. Algorithms* 1 (1991), 75–116.
- [17] Oswald, P., "Multilevel Finite Element Approximation", Teubner, Stuttgart 1994.
- [18] Powell, M.J.D., "Approximation Theory and Methods", Cambridge University Press, Cambridge 1981.
- [19] Riemenschneider, S.D. und Z. Shen, "Box-splines, cardinal series, and wavelets", in: *Approximation Theory and Functional Analysis*, herausgegeben von C.K. Chui, Academic Press, New York 1991.
- [20] Stoer, J., "Einführung in die numerische Mathematik I", Springer, Berlin 1983.
- [21] Strang, G., "Wavelets and dilation equations: a brief introduction", *SIAM Rev.* 31 (1989), 614–627.

Martin D. Buhmann, Mathematik, ETH-Zentrum, CH-8092 Zürich