

# Von den Keplerschen Gesetzen zu einer minutengenauen Sonnenuhr

Autor(en): **Blatter, Christian**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **49 (1994)**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-45433>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

---

## Von den Keplerschen Gesetzen zu einer minutengenauen Sonnenuhr

---

Christian Blatter

Christian Blatter, geboren 1935, studierte in Basel und promovierte 1960 bei Heinz Huber über "Extremallängen auf geschlossenen Flächen". Nach zwei Jahren als Visiting Assistant Professor in Stanford trat er 1964 in den Dienst der ETH Zürich und ist dort seit 1979 ordentlicher Professor für Mathematik. Neben verschiedenen Arbeiten im Kreuzungsgebiet von Funktionentheorie und Differentialgeometrie hat er ein Lehrbuch der Analysis für Mathematiker und Physiker verfasst.

Die allermeisten Sonnenuhren an Gebäuden und in Parkanlagen basieren auf der Annahme, daß sich die Sonne jeden Tag in genau 24 Stunden einmal um die Erde herum bewegt und am betreffenden Ort jeden Tag zu genau derselben bürgerlichen Zeit, zum Beispiel um 12.17 Uhr, durch den Ortsmeridian geht. In den Monographien [1] und [3] findet man viele schöne Beispiele von Sonnenuhren, die so funktionieren. In Wirklichkeit sind aber die Sonnentage nicht alle gleich lang; so sind zum Beispiel die Tage anfang Januar 40 Sekunden kürzer als anfang März. Die Kumulation dieser Zeitdifferenzen hat zur Folge, daß jede derartige Sonnenuhr an gewissen Tagen des Jahres eine gute Viertelstunde vorgeht, an anderen fast ebensoviel nachgeht. Die resultierende Abweichung in Funktion der Jahreszeit (Figur 3) heißt *Zeitgleichung*. Man findet hie und

Die astronomischen Grundtatsachen, die nötig sind, um eine minutengenaue Sonnenuhr zu konstruieren, sind uns allen geläufig: Die Erde bewegt sich auf einer Ellipsenbahn um die Sonne, wobei das zweite Keplersche Gesetz erfüllt ist, und auf dieser Bahn rotiert die Erde gleichmässig um ihre gegen die Bahnebene geneigte Achse. Die genauen Zahlenwerte der Parameter sind in jedem Lexikon zu finden. Die mathematische Aufgabe ist damit klar gestellt. Man erkennt ohne Mühe, dass ihre Lösung mit verhältnismässig elementaren mathematische Methoden möglich sein wird. Aber einfach ist die Behandlung des Problems trotzdem nicht. Die genaue Analyse des komplexen Zusammenspiels der einzelnen Bewegungselemente ist eine schwierige Aufgabe, welche neben einem ausgeprägten räumlichen Vorstellungsvermögen auch ein peinlich genaues methodisches Vorgehen verlangt. – Christian Blatter geht in seinem Beitrag den ganzen Weg vom abstrakten theoretischen Wissen bis zur konkreten praktischen Anwendung, der minutengenauen Sonnenuhr. *ust*

da Sonnenuhren, die auf mehr oder weniger kunstvolle Weise auf diese Abweichung aufmerksam machen.

Zu dem beschriebenen Effekt kommt es erstens infolge der Neigung der Erdoberfläche gegenüber der Ekliptik und zweitens, weil die Winkelgeschwindigkeit der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne nicht konstant ist: Die Verbindungslinie Sonne-Erde überfährt in gleichen Zeiten nicht gleiche Winkel, sondern gleiche Flächen.

Wenn wir eine Sonnenuhr konstruieren wollen, auf der die Zeitgleichung implementiert ist, benötigen wir daher eine hinreichend genaue Beschreibung des Erdorts zur Jahreszeit  $t$  sowie eine präzise Diskussion des Zusammenspiels von Erdumlauf und Erdrotation. Vgl. hierzu auch [2].

Im folgenden werden wir Formeln herleiten, die für einen beliebigen Ort  $P$  auf der Erde den von  $P$  aus gemessenen Sonnenstand  $\mathbf{x}(t, s)$  in Funktion der Jahreszeit  $t$  und der Tageszeit  $s$  ausdrücken. Mit Hilfe dieser Formeln ist es dann leicht möglich, minuten-genaue Sonnenuhren verschiedenster Art herzustellen.

An astronomischen Konstanten benötigen wir die numerische Exzentrizität der Erdbahn, sie besitzt den Wert  $\kappa = 0.016722 \doteq 1/60$ , weiter den Winkel  $\epsilon = 23.45^\circ$  zwischen Ekliptik und Äquatorebene und schließlich den Winkel  $\alpha = 78.5^\circ$  zwischen Perihel und Frühlingspunkt. In Wirklichkeit sind diese "Konstanten" nicht konstant; so dreht sich zum Beispiel das Perihel in 21 000 Jahren einmal um die Sonne. Dies wird im folgenden vernachlässigt.

Alle im folgenden eingeführten Basen ("Dreibein") sind orthonormiert und rechtshändig. Die Transformationsmatrix  $T$  zwischen zwei derartigen Basen (in den Kolonnen stehen die alten Koordinaten der neuen Basisvektoren) ist daher orthogonal, und es gilt  $T^{-1} = T'$ . Ist  $\mathbf{x}$  ein Vektor im Raum, so bezeichnet  $\mathbf{x}_a$  den Kolonnenvektor der Koordinaten von  $\mathbf{x}$  bezüglich der Basis  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ .

Wir beginnen mit einem raumfesten Dreibein  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ . Im Ursprung befindet sich die Sonne, und die Erdbahn liegt in der  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ -Ebene, das Perihel auf der positiven  $\mathbf{f}_1$ -Achse (siehe die Figur 1). Die Erdbahnellipse (mit großer Achse 1, Exzentrizität  $\kappa$  und Flächeninhalt  $\pi\sqrt{1-\kappa^2}$ ) besitzt dann folgende Polardarstellung:

$$r(\psi) = \frac{1 - \kappa^2}{1 + \kappa \cos \psi} ;$$

dabei bezeichnet  $\psi$  den Polarwinkel des Erdorts. Nach dem 2. Keplerschen Gesetz (Flächensatz) ist

$$dA = c dt , \quad c := \frac{\sqrt{1 - \kappa^2}}{2} ,$$

wobei die Konstante  $c$  so festgelegt wurde, daß  $t$  innerhalb eines Jahres um  $2\pi$  zunimmt. Andererseits hat man

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\psi ;$$

somit gilt

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{2c}{r^2} = (1 + \kappa \cos \psi)^2 (1 - \kappa^2)^{-3/2} .$$

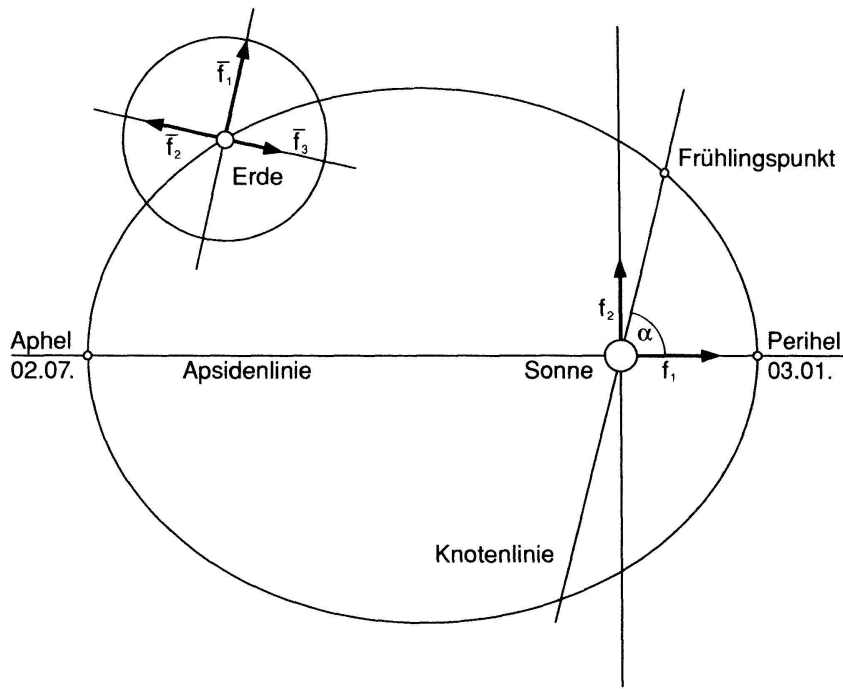


Fig. 1

Hiernach genügt  $\psi(\cdot)$  der Differentialgleichung

$$\dot{\psi} = (1 + \kappa \cos \psi)^2 (1 - \kappa^2)^{-3/2}, \tag{1}$$

wobei wir die Anfangsbedingung

$$\psi(0) = 0 \tag{2}$$

(das heißt  $t = 0$  im Perihel) zugrundelegen. Diese Differentialgleichung läßt sich separieren und sogar elementar integrieren. Dabei erhält man einen expliziten Ausdruck für die Umkehrfunktion  $\psi \mapsto t(\psi)$ ; wir benötigen aber explizit  $t \mapsto \psi(t)$ .

Nach allgemeinen Prinzipien läßt sich  $\psi(\cdot)$  in eine konvergente Reihe nach dem kleinen Parameter  $\kappa$  entwickeln:

$$\psi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(t) \kappa^j ;$$

dabei ist offensichtlich  $\psi_0(t) = t$ , und die weiteren  $\psi_j(\cdot)$  sind  $2\pi$ -periodisch. Wir machen also den Ansatz

$$\psi(t) := t + \delta(t), \quad \delta(t) := u(t) \kappa + v(t) \kappa^2 + ? \kappa^3$$

und lösen (1) "auf  $\kappa^2$  genau", das heißt: durch Koeffizientenvergleich, wobei alle Terme von dritter oder höherer Ordnung in  $\kappa$  vernachlässigt werden.

In diesem Sinne berechnet man

$$\dot{\psi} = 1 + \dot{u}(t) \kappa + \dot{v}(t) \kappa^2 + ? \kappa^3 ,$$

$$\cos \psi = \cos t \cos \delta(t) - \sin t \sin \delta(t) = \cos t - u(t) \sin t \kappa + ? \kappa^2 ,$$

$$(1 - \kappa^2)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2} \kappa^2 + ? \kappa^4 .$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= (1 + \kappa \cos \psi)^2 (1 - \kappa^2)^{-3/2} \\ &= 1 + \dot{u} \kappa + \dot{v} \kappa^2 - (1 + 2 \cos t \kappa - 2u \sin t \kappa^2 + \cos^2 t \kappa^2 + \kappa^3) \left(1 + \frac{3}{2} \kappa^2 + \kappa^4\right) \\ &= (\dot{u} - 2 \cos t) \kappa + \left(\dot{v} + 2u \sin t - \cos^2 t - \frac{3}{2}\right) \kappa^2 + \kappa^3. \end{aligned}$$

Da hier die linke Seite identisch in  $t$  (und  $\kappa$ ) verschwinden soll, folgt  $\dot{u}(t) = 2 \cos t$  und wegen (2) daher

$$u(t) = 2 \sin t.$$

Weiter hat man

$$\dot{v}(t) = -4 \sin^2 t + \cos^2 t + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} (\cos^2 t - \sin^2 t)$$

und folglich

$$v(t) = \frac{5}{4} \sin(2t).$$

Wir setzen also im weiteren

$$\delta(t) := 2 \sin t \kappa + \frac{5}{4} \sin(2t) \kappa^2.$$

Eine Fehlerabschätzung würde zeigen, daß dieses  $\delta(\cdot)$  bzw. das zugehörige  $\psi(\cdot)$  für alle Zeiten um weniger als  $10^{-4}$  von der wahren Lösung des Anfangswertproblems (1)  $\wedge$  (2) abweicht. Dabei kommt uns zustatten, daß die Näherungslösung für alle  $t = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , von vorneherein den richtigen Wert liefert. Der hierdurch bewirkte Fehler der Zeitgleichung  $\mu(\cdot)$  ist von derselben Größenordnung (vgl. (7)). Wird das gemäß  $2\pi \hat{=} 24$  h auf die Zeitskala umgerechnet, so kommt man auf weniger als 1.5 Sekunden, was wohl für die Zwecke einer Sonnenuhr vernachlässigt werden darf.

Damit besitzt der Einheitsvektor von der Sonne zur Erde im  $\mathbf{f}$ -System die folgende Parameterdarstellung:

$$t \mapsto (\cos(t + \delta(t)), \sin(t + \delta(t)), 0). \quad (3)$$

Von nun an betrachten wir die Sonne von der Erde aus: Der von der Erde zur Sonne weisende Richtungsvektor ist nach (3) gegeben durch

$$\mathbf{x}_f := \begin{bmatrix} -\cos(t + \delta(t)) \\ -\sin(t + \delta(t)) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die (fiktive) *dynamische mittlere Sonne* rotiert mit konstanter Geschwindigkeit in der Ekliptik und ist gleichzeitig mit der wahren Sonne in Perihel und Aphel. Um ihren (von

der Erde aus gesehenen) Ort  $y$  zu erhalten, müssen wir im Ausdruck für  $x$  den Parameter  $\kappa$  bzw. die Funktion  $\delta(\cdot)$  gleich 0 setzen. Es ergibt sich

$$y_f = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Das ebenfalls raumfeste Dreibein  $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)$  ist folgendermaßen festgelegt (siehe die Figur 1):  $\bar{f}_1$  liegt in der Knotenlinie,  $\bar{f}_2$  ist senkrecht dazu in der Äquatorebene, und  $\bar{f}_3 := \bar{f}_1 \times \bar{f}_2$ . Die Transformationsmatrix  $T_{f\bar{f}}$  hat dann folgende Gestalt:

$$T_{f\bar{f}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \epsilon & \sin \alpha \sin \epsilon \\ \sin \alpha & \cos \alpha \cos \epsilon & -\cos \alpha \sin \epsilon \\ 0 & \sin \epsilon & \cos \epsilon \end{bmatrix} .$$

Hiernach ist die wahre Sonne im  $\bar{f}$ -System gegeben durch

$$\begin{aligned} x_{\bar{f}} = T'_{f\bar{f}} x_f &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha \cos \epsilon & \cos \alpha \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ \sin \alpha \sin \epsilon & -\cos \alpha \sin \epsilon & \cos \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos(t + \delta(t)) \\ -\sin(t + \delta(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\cos(t + \delta(t) - \alpha) \\ -\sin(t + \delta(t) - \alpha) \cos \epsilon \\ \sin(t + \delta(t) - \alpha) \sin \epsilon \end{bmatrix} , \end{aligned}$$

und für die dynamische mittlere Sonne erhält man

$$y_{\bar{f}} = \begin{bmatrix} -\cos(t - \alpha) \\ -\sin(t - \alpha) \cos \epsilon \\ \sin(t - \alpha) \sin \epsilon \end{bmatrix} .$$

Die (ebenfalls fiktive) *mittlere Sonne* koinzidiert zur Zeit  $t = \alpha$  mit der dynamischen mittleren Sonne im Frühlingspunkt und rotiert mit konstanter Geschwindigkeit in der Äquatorebene. Ihr Ort  $z$  ist folglich im  $\bar{f}$ -System gegeben durch

$$z_{\bar{f}} = \begin{bmatrix} -\cos(t - \alpha) \\ -\sin(t - \alpha) \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Das  $\bar{e}$ -Dreibein ist starr mit der rotierenden Erde verbunden, und zwar liegen  $\bar{e}_1$  und  $\bar{e}_2$  in der Äquatorebene,  $\bar{e}_1$  auf dem Ortsmeridian von  $P$ , und  $\bar{e}_3$  zeigt zum Nordpol (siehe die Figur 2). Die Transformationsmatrix vom  $\bar{f}$ - zum  $\bar{e}$ -System ist somit gegeben durch

$$T_{\bar{f}\bar{e}} = \begin{bmatrix} \cos \tau & -\sin \tau & 0 \\ \sin \tau & \cos \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

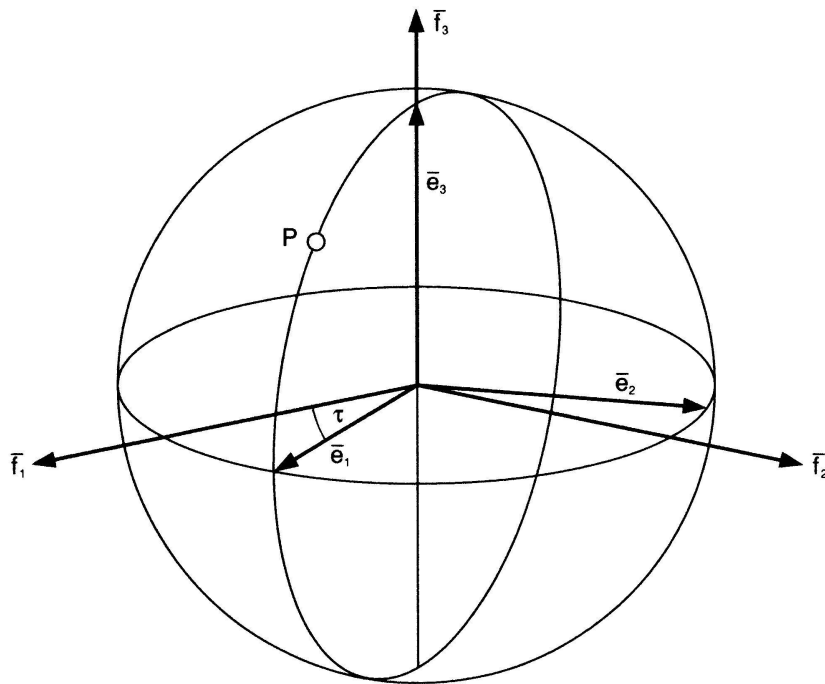


Fig. 2

dabei bezeichnet  $\tau$  die Sternzeit: Eine volle Erddrehung gegenüber dem Fixsternhimmel entspricht einer Zunahme von  $\tau$  um  $2\pi$ ; um den Nullpunkt von  $\tau$  brauchen wir uns im Augenblick nicht zu kümmern.

Für  $\mathbf{z}_{\bar{e}}$ , ausgedrückt in den Zeitvariablen  $t$  und  $\tau$ , erhalten wir

$$\mathbf{z}_{\bar{e}} = T'_{\bar{f}\bar{e}} \mathbf{z}_{\bar{f}} = \begin{bmatrix} \cos \tau & \sin \tau & 0 \\ -\sin \tau & \cos \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos(t - \alpha) \\ -\sin(t - \alpha) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\tau - t + \alpha) \\ \sin(\tau - t + \alpha) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Die *mittlere Ortszeit*  $s$  auf dem Meridian von  $P$  ist folgendermaßen festgelegt: Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kulminationen der mittleren Sonne, das heißt: innerhalb von 24 Stunden, nimmt  $s$  um  $2\pi$  zu, und  $s = \pi \pmod{2\pi}$  im Moment der Kulmination. Die Kulmination findet in dem Moment statt, wo die  $\bar{e}_1$ -Komponente von  $\mathbf{z}$  maximal ist. Der Gleichung (4) entnimmt man somit, daß die drei Zeitvariablen  $t$ ,  $\tau$  und  $s$  miteinander verknüpft sind durch

$$\tau - t + \alpha = s \pmod{2\pi};$$

wir können daher  $\tau$  mit Hilfe von

$$\tau := (t - \alpha) + s \quad (5)$$

aus unseren Gleichungen eliminieren. Als erstes ergibt sich

$$\mathbf{z}_{\bar{e}} = (-\cos s, \sin s, 0);$$

in Worten: Die mittlere Sonne umläuft Tag für Tag den Äquator (von Norden gesehen) im Uhrzeigersinn in genau 24 Stunden.

Wegen (5) läßt sich  $T_{f\bar{e}}$  als Produkt schreiben:

$$T_{f\bar{e}} = \begin{bmatrix} \cos(t - \alpha) & -\sin(t - \alpha) & 0 \\ \sin(t - \alpha) & \cos(t - \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

so daß wir für die wahre Sonne im  $\bar{e}$ -System das folgende erhalten:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\bar{e}} &= T'_{f\bar{e}} \mathbf{x}_f = \begin{bmatrix} \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t - \alpha) & \sin(t - \alpha) & 0 \\ -\sin(t - \alpha) & \cos(t - \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} -\cos(t + \delta(t) - \alpha) \\ -\sin(t + \delta(t) - \alpha)(1 - 2 \sin^2 \frac{\epsilon}{2}) \\ \sin(t + \delta(t) - \alpha) \sin \epsilon \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \delta(t) + 2 \sin^2 \frac{\epsilon}{2} \sin(t + \delta(t) - \alpha) \sin(t - \alpha) \\ -\sin \delta(t) + 2 \sin^2 \frac{\epsilon}{2} \sin(t + \delta(t) - \alpha) \cos(t - \alpha) \\ \sin(t + \delta(t) - \alpha) \sin \epsilon \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Der zweite Faktor rechter Hand ( $=: \mathbf{w}(t)$ ) ist ein Einheitsvektor und läßt sich daher in der Form

$$\mathbf{w} = (-r \cos \mu, r \sin \mu, h)$$

schreiben; dabei ist

$$h(t) := \sin(t + \delta(t) - \alpha) \sin \epsilon, \quad r(t) := \sqrt{1 - h^2(t)}$$

und

$$\begin{aligned} \mu(t) &:= \arctan \frac{-\sin \delta(t) + 2 \sin^2 \frac{\epsilon}{2} \sin(t + \delta(t) - \alpha) \cos(t - \alpha)}{\cos \delta(t) - 2 \sin^2 \frac{\epsilon}{2} \sin(t + \delta(t) - \alpha) \sin(t - \alpha)} \\ &= \arctan \frac{-\sin \delta(t) + \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \sin(2(t - \alpha) + \delta(t))}{\cos \delta(t) + \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \cos(2(t - \alpha) + \delta(t))}. \end{aligned} \tag{6}$$

Mit den neu eingeführten Bezeichnungen haben wir

$$\mathbf{x}_{\bar{e}} = \begin{bmatrix} \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} -r(t) \cos(s + \mu(t)) \\ r(t) \sin(s + \mu(t)) \\ h(t) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Wir wollen die Jahreszeit  $t$  und die Tageszeit  $s$  für einen Moment als unabhängige Variable betrachten. Die Formel (7) läßt sich dann folgendermaßen interpretieren: Für festes  $t$  und variables  $s$  beschreibt die Sonne während eines Tages auf der Himmelskugel einen Kreis in einer zum Äquator parallelen Ebene der geographischen Breite  $\eta(t) := \arcsin h(t)$ ; die maximale im Laufe eines Jahres auftretende Breite ist  $\epsilon$ . Während die mittlere Sonne jeden Tag zur Zeit  $s = \pi$  kulminiert, ist das für die wahre Sonne zur Zeit



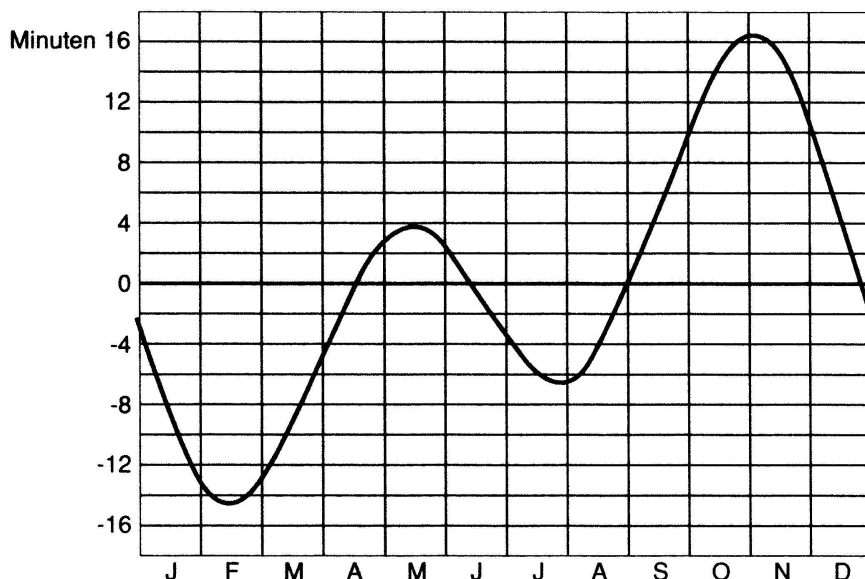


Fig. 3

$s = \pi - \mu(t)$  der Fall. Eine nach der mittleren Sonne “gerichtete” Sonnenuhr wird also um den (im Laufe eines Jahres veränderlichen) Betrag  $\mu(t)$  vorgehen. Die Funktion  $\mu(\cdot)$  heißt *Zeitgleichung* (siehe die Figur 3).

Halten wir jedoch die Tageszeit  $s$  fest, zum Beispiel  $s := \pi$ , so sagt uns (7) bei variablem  $t$ , an welcher Stelle des Himmels sich die Sonne an den verschiedenen Tagen des Jahres um 12 Uhr Ortszeit befindet: Der Sonnenstand hat (bezogen auf den Ortsmeridian) die geographische Länge  $-\mu(t)$  und die geographische Breite  $\eta(t)$ . Die für kontinuierlich veränderliches  $t$  resultierende Kurve ist kein Meridianbogen, sondern hat die Form einer 8, siehe die Figur 4.

Zur Konstruktion von Sonnenuhren benötigen wir eine bequeme Beschreibung des Sonnenstands am Orte  $P$ . Das  $e$ -Dreibein ist wie folgt definiert (siehe die Figur 5): Der Ursprung liegt in  $P$ ,  $e_1$  zeigt in der Horizontebene von  $P$  nach Osten,  $e_2$  nach Norden, und  $e_3$  zeigt vertikal nach oben. Liegt  $P$  auf der geographischen Breite  $\theta$ , so ist damit die Transformationsmatrix  $T_{\bar{e}e}$  gegeben durch

$$T_{\bar{e}e} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \theta & \cos \theta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Mit (7) erhalten wir damit für den Sonnenstand im  $e$ -System:

$$\mathbf{x}_e = T_{\bar{e}e}' \mathbf{x}_{\bar{e}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r(t) \cos(s + \mu(t)) \\ r(t) \sin(s + \mu(t)) \\ h(t) \end{bmatrix};$$

die Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  von  $\mathbf{x}_e$  sind somit gegeben durch

$$\begin{aligned} x_1 &= r(t) \sin(s + \mu(t)) \\ x_2 &= r(t) \cos(s + \mu(t)) \sin \theta + h(t) \cos \theta \\ x_3 &= -r(t) \cos(s + \mu(t)) \cos \theta + h(t) \sin \theta \end{aligned} \quad (8)$$

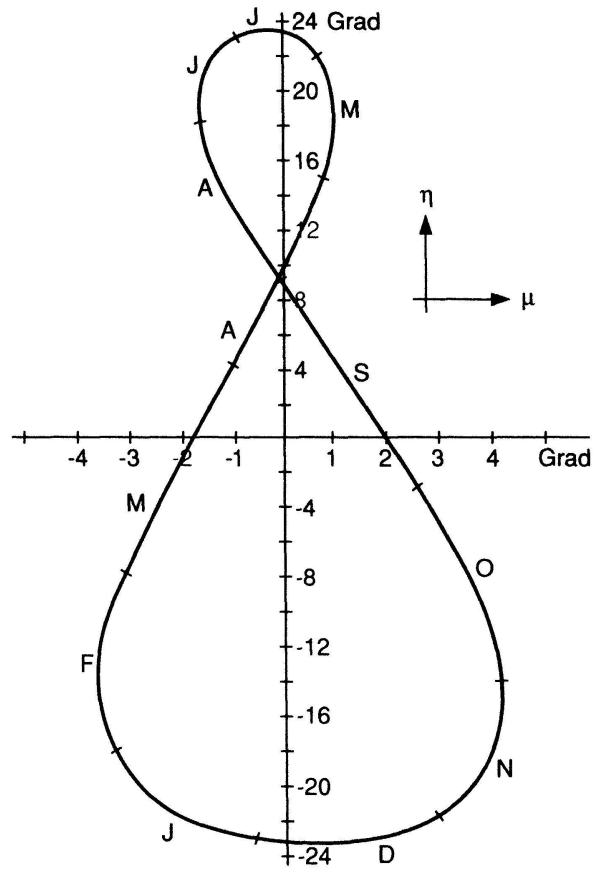


Fig. 4

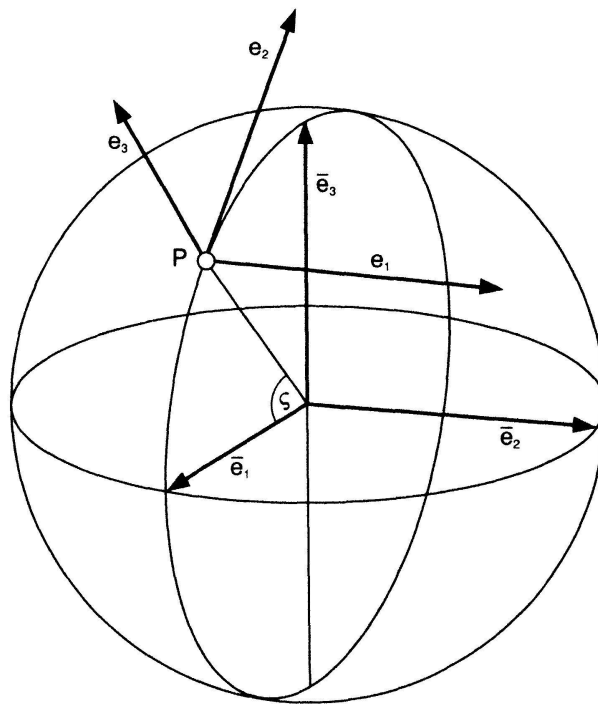


Fig. 5

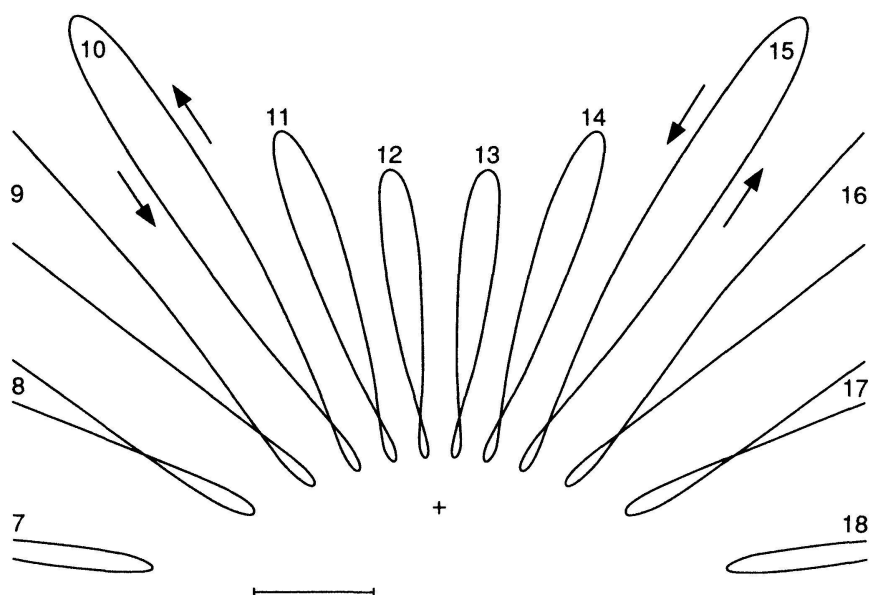


Fig. 6

Zum Schluß benötigen wir eine Formel, die die mitteleuropäische Zeit  $S$  (Einheit: Stunden,  $S = 12$  ist Mittag) für einen Ort  $P$  der geographischen Länge  $\phi$  (Einheit: Grad,  $\phi = 0$  ist der Meridian von Greenwich) auf die Variable  $s$  umrechnet. Die *mitteleuropäische Zeit* ist definiert als mittlere Ortszeit auf dem 15. Längengrad. Da die mittlere Sonne pro Stunde  $15^\circ$  zurücklegt, erhält man damit ohne weiteres

$$s = \frac{\pi}{12} \left( S + \frac{\phi - 15}{15} \right). \quad (9)$$

Wir wollen nun wirklich eine Sonnenuhr fabrizieren und wählen das folgende einfache Design: Wir bringen im Punkt  $(0, 0, 1)$  des  $\mathbf{e}$ -Systems eine kleine Kugel an und verfolgen ihren Schatten auf der  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ -Ebene für feste Zeiten  $S := 7, 8, \dots, 17, 18$  als Funktion der Jahreszeit  $t$ . Wir erhalten eine Kollektion von Achterschleifen, die mit den Zahlen 7 bis 18 angeschrieben werden können (siehe die Figur 6). Die Uhr wird in der Weise abgelesen, daß aus der Lage des Kugelschattens in dem Schleifenmuster die gesuchte Zeit  $S$  interpoliert wird. Dabei ist zu berücksichtigen, daß zum Kalenderintervall  $\sim 21$ . Dezember bis  $\sim 21$ . Juni jeweils der "absteigende" Teil jeder Schleife gehört, zur zweiten Jahreshälfte der "aufsteigende" Teil (siehe die Pfeile in der Figur 6).

Die Figur 6 wird im einzelnen folgendermaßen erhalten: Der zur Tageszeit  $s$  und zur Jahreszeit  $t$  gehörende Sonnenstrahl durch den Punkt  $(0, 0, 1) = \mathbf{e}_3$  besitzt die Parameterdarstellung

$$u \mapsto \mathbf{e}_3 - u \mathbf{x}(s, t)$$

und schneidet die  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ -Ebene zur "Lichtzeit"  $u = 1/x_3$ . Der Schnittpunkt  $\mathbf{p}(s, t)$  hat daher die Koordinaten

$$p_1 = -\frac{x_1}{x_3}, \quad p_2 = -\frac{x_2}{x_3}.$$

Mit diesen Formeln und (9) läßt sich leicht ein Programm schreiben, das die gewünschten Schleifen für gegebene Werte von  $S$  zeichnet. — In ähnlicher Weise berechnet man mit

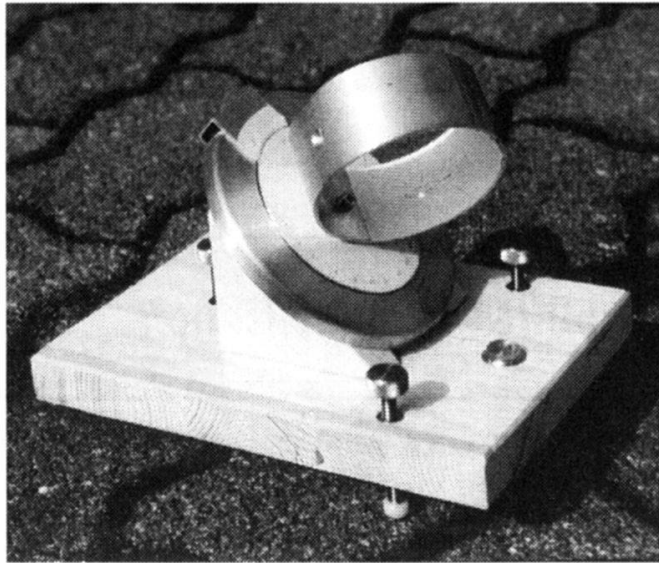


Fig. 7

Hilfe von (8) und (9) das Schleifenmuster für ein vertikales Zifferblatt, dessen Normale in eine vorgegebene Himmelsrichtung zeigt.

Es läßt sich nicht von der Hand weisen, daß das Ablesen der genauen Zeit in dem resultierenden Schleifenmuster nicht ganz einfach ist. Es entsteht damit die interessante Aufgabe, eine Sonnenuhr zu konzipieren, bei der eine einzige Achterschleife für alle Tageszeiten dient. Eine gewisse Verbreitung haben die Uhren des Ingenieurs Martin Bernhardt gefunden, bei denen der schattenwerfende Stab als geschwungene Keule ausgebildet ist (genaugenommen braucht es zwei Keulen, die an den Sonnwenden gegeneinander ausgetauscht werden, siehe [3], Bd. 1, pp. 87 und 144); eine ähnliche Konstruktion findet sich als Tischuhr in vielen physikalischen Sammlungen. Eine besonders schöne Lösung aus neuester Zeit stammt von Heinz Schilt, CH-3506 Großhöchstetten (Figur 7): Der um die Erdachse drehbare Messingring besitzt auf halber Höhe ein kleines kreisrundes Loch, und auf der gegenüberliegenden Innenseite ist eine Achterschleife mit Monatsangaben eingraviert. Das Zifferblatt liegt in der Äquatorebene und ist fest mit dem Messingring verbunden; an seiner Peripherie ist eine Zeitskala mit Zehnminutenstrichen angebracht. Nachdem man die Uhr korrekt aufgestellt hat, muss man den Messingring so lange drehen, bis die Sonne durch das kleine Loch hindurch einen Lichtpunkt an der richtigen Stelle der Achterschleife erzeugt. Mithilfe eines Nonius am oberen Rand der Äquatorebene kann dann die Zeit minutengenau abgelesen werden.

### Literatur

- [1] René R.J. Rohr: *Die Sonnenuhr. Geschichte, Theorie, Funktion*. München 1982 (Callwey).
- [2] Heinz Schilt: *Ebene Sonnenuhren verstehen und planen, berechnen und bauen*. 6. Auflage, Biel 1991.
- [3] Heinz Schumacher: *Sonnenuhren. Eine Anleitung für Handwerker und Liebhaber*. Band 1: *Gestaltung, Konstruktion, Ausführung*. 3. Auflage, München 1984 (Callwey). Band 3 (mit Adolf Peitz): *303 Beispiele aus 12 Ländern*. München 1982 (Callwey).