Über die Kreise, welche aus drei Geraden Strecken vorgegebener Länge herausschneiden

El. Math. *49* (1994) 0013-6018/94/010118-02$1.50 + 0.20/0

Über die Kreise, welche aus drei Geraden Strecken vorgegebener Länge herausschneiden

Roland Stärk

Roland Stärk studierte an der ETH Zürich. Nach der Promotion zum Dr. sc. math. im Jahre 1963 wurde er Lehrer an der Kantonsschule Schaffhausen. Er ist Verfasser eines Lehrbuches der Darstellenden Geometrie. Sein mathematisches Lieblingsgebiet ist die Elementargeometrie.

Neben dem Umkreis gibt es bei einem Dreieck noch drei weitere Kreise, welche aus den Seitengeraden Strecken herausschneiden, die gleich lang sind wie die Dreiecksseiten. Dies wurde kürzlich von *L. Stammler* in [2] untersucht mit dem überraschenden Resultat, dass die Mittelpunkte dieser drei Kreise ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Es dürfte den Leser vielleicht interessieren, wie sich dieser Sachverhalt auf kurzem Wege, ohne grosse analytische Rechnung, herleiten lässt.

Als bekannt setzen wir die folgenden drei in der Schule oft bewiesenen Sätze über gleichseitige Hyperbeln voraus:

Hilfssatz 1: *Der Höhenschnittpunkt eines einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks liegt auch auf der Hyperbel.*

Hilfssatz 2: *Der Feuerbachkreis eines einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks geht durch das Zentrum der Hyperbel.*

Hilfssatz 3: *Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Differenz der Quadrate der Abstände von zwei nicht parallelen Geraden konstant ist, ist eine gleichseitige Hy-*

Die Kreise, die aus den Seiten eines Dreiecks Strecken herausschneiden, deren Längen mit den Längen der Dreiecksseiten übereinstimmen, wurden kürzlich von Ludwig Stammler (siehe El. Math. 47 (1992), 158–168) genauer untersucht. Dabei wurde gezeigt, dass die Mittelpunkte der drei vom Umkreis des Dreiecks verschiedenen derartigen Kreise ein gleichseitiges Dreieck bilden. Im vorliegenden Beitrag, der durch Stammlers Arbeit angeregt worden ist, ordnet Roland Stärk dieses Resultat in das dichte Netzwerk von Begriffen und Sätzen der Elementargeometrie ein. Er gibt einen Beweis an, der nur elementargeometrische Methoden verwendet und der ohne grosse analytische Rechnungen auskommt. *ust*

perbel mit den Winkelhalbierenden der beiden Geraden als Asymptoten. (Sie artet aus, wenn die Konstante Null ist).

Ferner benützen wir den Begriff des orthozentrischen Vierecks [1]:

Vier Punkte bilden die Ecken eines orthozentrischen Vierecks, wenn jeder von ihnen der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ist, das durch die drei anderen gebildet wird. Die durch je drei Ecken eines orthozentrischen Vierecks gebildeten Dreiecke haben alle denselben Feuerbachkreis. Man nennt seinen Mittelpunkt den Feuerbachpunkt des orthozentrischen Vierecks.

Wenn nun ein Kreis aus der Seitengeraden BC eines Dreiecks ABC eine Strecke der Länge u, aus der Geraden CA eine Strecke der Länge v und aus AB eine Strecke der Länge w herausschneidet, dann gilt für die Abstände d_2, d_3 seines Mittelpunkts M von den Geraden CA, AB die Formel $d_2^2+(v/2)^2 = d_3^2+(w/2)^2$. M liegt auf der durch den Hilfssatz 3 erklärten gleichseitigen Hyperbel h_A für die Konstante $d_2^2-d_3^2 = \frac{1}{4}(w^2-v^2)$. Ihre Asymptoten sind die durch A laufenden Winkelhalbierenden des Dreiecks. Wir nennen h_A die zu den Streckenlängen v und w gehörende Hyperbel der Geraden CA und AB. Ebenso liegt M auf der zu den Streckenlängen w und u gehörenden Hyperbel h_B der Geraden AB und BC und auf der zu den Streckenlängen u und v gehörenden Hyperbel h_C von BC und CA. Zwei Hyperbeln schneiden sich in vier Punkten. Unter welchen Bedingungen in unserem Fall nicht alle Schnittpunkte reell sind, soll hier nicht untersucht werden. Die Schnittpunkte M_1, M_2, M_3, M_4 von h_A und h_B sind nun also die Mittelpunkte der Kreise, die aus den Dreiecksseitengeraden die vorgegebenen Strecken herausschneiden. Sie gehören auch zu h_C.

Nun betrachte man drei der Punkte M. Nach dem Hilfssatz 1 liegt der Höhenschnittpunkt des durch sie gebildeten Dreiecks auch auf h_A, h_B und h_C. Er ist daher der vierte Punkt M. Die Punkte M bilden ein orthozentrisches Viereck. Nach dem Hilfssatz 2 geht der Feuerbachkreis dieses Vierecks durch A, B und C.

Satz: *Die Mittelpunkte der vier Kreise, welche aus den Seitengeraden eines Dreiecks Strecken vorgegebener Länge herausschneiden, sind die Ecken eines orthozentrischen Vierecks, dessen Feuerbachkreis der Umkreis des Dreiecks ist.*

Wählt man für u, v, w gerade die Seitenlängen des Dreiecks, so ist einer der vier Kreise der Umkreis des Dreiecks. Der Umkreismittelpunkt ist dann gleichzeitig Ecke und Feuerbachpunkt des orthozentrischen Vierecks. Das geht nur, wenn die drei anderen Ecken ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Die in [2] als "Mittenhyperbel" bezeichnete Hyperbel eines Dreiecks ABC enthält übrigens auch den Lemoinepunkt des Dreiecks, und ihr Zentrum ist der Berührungspunkt des Umkreises mit dem Feuerbachkreis des durch die Umkreistangenten in A, B, C gebildeten Dreiecks.

Literatur

[1] Johnson R.A.: Advanced Euclidean Geometry. Dover Publications Inc., New York 1960.

[2] Stammler L.: Dreiecks-Proportionalschnittkreise, ihre Mittenhyperbel und ein Pendant zum Satz von Morley. El.Math. **47** (1992). Birkhäuser Verlag, Basel.

Dr. Roland Stärk, Santenbühl, CH-8234 Stetten