El. Math., 47, (1992)

0013-6018/92/040173-04$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Neue Aufgaben

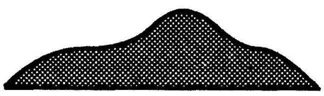
Lösungen sind erbeten bis zum 10. Mai 1993 an:

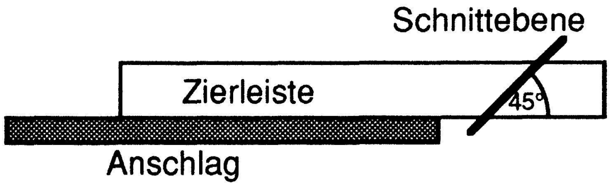
- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma oder
- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

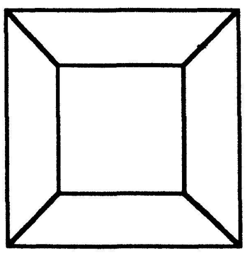
Aufgabe 1067: Die Potenzmenge $P(M_n)$ der Menge $M_n = \{1, 2, ..., n\}$ ist durch die Teilmengenrelation $\subseteq$ teilgeordnet. Eine k-Teilmenge $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ von $P(M_n)$ ist linear geordnet, wenn $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_k$ gilt. Man bestimme deren Anzahl $a(n, k)$.

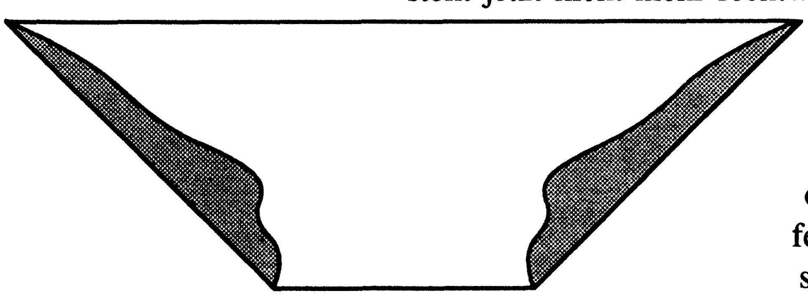
Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1068: Mein Nachbar ist Schreiner und macht manchmal geometrische Spiele mit seinem Holz und seinen Maschinen. So hat er aus Abfällen von Zierleisten mit dem in der Figur gezeigten Querschnitt mehrere gleiche Stücke zugeschnitten und zu einer Art Bilderrahmen zusammengeleimt. Dazu hat er zuerst die Leiste flach auf den Sägetisch und bündig an den Anschlag gelegt. Er verdrehte das Sägeblatt (die Schnittebene) um eine vertikale Achse mit 45°, so dass er eine perfekte Gehrung sägen konnte. Von oben sieht die Anordnung wie nebenstehend abgebildet aus. Mit vier entsprechend geschnittenen, gleichen Zierleistenstükken konnte er dann den abgebildeten Rahmen (von oben gesehen) zusammenleimen. Nun macht er aber ein weiteres Experiment: Er belässt die 45°-Verdrehung des Sägeblattes gegenüber dem Anschlag, macht aber anstelle von vertikalen Schnitten schräge Schnitte. Das heisst, dass die Säge um eine horizontale Achse geschwenkt wird. Das Sägeblatt steht jetzt nicht mehr rechtwinklig zum Sägetisch, sondern ist mit ebenfalls 45° gegen die Tischebene geneigt. Damit wird die Schnittfläche von oben gesehen sichtbar, und die fertig geschnittenen Stücke präsentieren sich wie in der Figur.









Was für ein Rahmen ergibt sich, wenn man solche Stücke mit ihren Schnittflächen bündig aneinander verleimt? Aus wie vielen Stücken besteht der Rahmen? Welche Verallgemeinerungen drängen sich auf?

Peter Gallin, Bauma, CH

Lösungen:

Aufgabe 1057. Man berechne die Summe der unendlichen Reihe

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n/(n+\bar{x}_n),$$

wobei $\bar{x}_n$ den Mittelwert aller im offenen Intervall $(n, n+1)$ gelegenen Nullstellen der durch

$$f(x)=[x^2]-2[x]x+[x]^2$$

gegebenen reellen Funktionen f bezeichnet.

Hj. Stocker, Wädenswil

Lösung. Benützt man in der Bedingung $f(x)=0$ die Zerlegung $x=n+k$, $n\in\mathbb{Z}$, $0\leq k<1$, so findet man die Gleichung $[2nk+k^2]=2nk$, welche genau für ganzzahlige $2nk$ lösbar ist. Für $n=0$ ist k beliebig und somit (dies ist wohl die Meinung des Aufgabenstellers) $\bar{x}_0=1/2$. Für $n\neq 0$ ist $k\in\{0,\frac{1}{2n},\frac{2}{2n},\ldots,\frac{2n-1}{2n}\}$ und folglich $\bar{x}_n=n+1/2$. Für die gesuchte Reihe erhält man also den Ausdruck

$$S=2\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n/(4n+1).$$

Den Wert von S findet man z.B. mit Hilfe der Entwicklung $\ln\frac{1+x}{1-x}=2x\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2i+1}x^{2i}$. Nach der Substitution $x=e^{i\frac{\pi}{4}}$ vergleiche man die Imaginärteile und findet $\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}S$, also schließlich

$$S=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

B. Ruh, Solothurn

Weitere Lösungen sandten O.P. Lossers (Eindhoven, NL), M. Vowe (Therwil), B.M.M. de Weger (Enschede, NL), H.-J. Seiffert (Berlin, BRD), H. Widmer (Rieden), R. Wyss (Flumenthal). Eine Lösung war fehlerhaft, eine weitere nicht gezeichnet.

Aufgabe 1058. Es seien $A_1,\ldots,A_n$ die Ecken eines regulären n-Ecks mit Umkreisradius R, P ein beliebiger Punkt auf dem Umkreis. Für $k\in\mathbb{N}$ sei

$$S_{k,n}:=\sum_{i=1}^{n}|PA_i|^k.$$

Man zeige, daß

$$S_{1,n}\leq Rn\sqrt{2} \tag{1}$$

$$S_{k,n}\geq n\cdot 2^{k/2}R^k \quad \text{für } k\geq 2 \tag{2}$$

D.M. Milosevic, Pranjani, YU

Solution. Let the points of the n-gon be given by $\mathrm{R}e^{2\pi ik/n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ and P by $\mathrm{R}e^{i\vartheta}$. By symmetry, we can take ϑ to lie in $[0, \pi/n]$. Then

$$S_{1,n} = R\sum_{i=1}^{n} |e^{2\pi ik/n} - e^{i\vartheta}| = 2R\sum_{i=1}^{n} -\sin(\pi k/n - \vartheta/2).$$

Expanding out the summand and summing over k, we get

$$S_{1,n} = 2R\{\cos(\pi/2n - \vartheta/2)\}/\sin(\pi/2n) \leq 2R/\sin(\pi/2n).$$

Since $(\sin x)/x$ is decreasing in $[0, \pi/2]$, $\sin(\pi/2n) \geq 3/(2n)$ so that

$$S_{1,n} \leq 4nR/3 < nR\sqrt{2}.$$

For the second part, we give a more general result for P being any point in the plane of the polygon. Letting $\mathbf{A_i}$ denote the vector from the center O of the circle to A_i, etc.,

$$S_{2,n} = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{A_i} - \mathbf{P}|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{A_i}^2 + \mathbf{P}^2 - 2\mathbf{A_i}\cdot\mathbf{P}) = n(R^2 + OP^2)$$

(this is a known result). Then by the power mean inequality

$$(S_{k,n}/n)^{1/k} \geq (S_{2,n}/n)^{1/2}, \quad k \geq 2,$$

so that

$$S_{k,n} \geq n(R^2 + OP^2)^{k/2} \text{ for } k \geq 2.$$

For the special case when P is any point on the circumcircle, $OP = R$ and

$$S_{k,n} \geq n(2R^2)^{k/2}.$$

M.S. Klamkin, Edmonton, Canada

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), H.-J. Seiffert (Berlin, BRD), M. Vowe (Therwil), H. Widmer (Rieden). Eine Lösung war nicht gezeichnet.

Aufgabe 1059. Für natürliche Zahlen n und $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ soll die Summe

$$\sum_{k=0}^{[j/2]} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} \binom{n-1-2k}{j-2k} 4^{-k}$$

geschlossen ausgewertet werden.

H.-J. Seiffert, Berlin, D

Lösung: Für den Ausdruck

$$s_{n,j} = \sum_{k=0}^{[j/2]} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} \binom{n-1-2k}{j-2k} 4^{-k} \quad (0 \le j < n)$$

leiten wir die für $1 < j < n$ gültige Rekursionsformel $s_{n+1,j} = \frac{n}{n-j} s_{n,j} + \frac{1}{4} s_{n-1,j-2}$ her:

$$\begin{aligned}
s_{n+1,j} &= \sum_{k=0}^{[j/2]} (-1)^k \binom{n-k}{k} \binom{n-2k}{j-2k} 4^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{[j/2]} (-1)^k \frac{n-k}{n-j} \binom{n-1-k}{k} \binom{n-1-2k}{j-2k} 4^{-k} \\
&= \frac{n}{n-j} \sum_{k=0}^{[j/2]} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} \binom{n-1-2k}{j-2k} 4^{-k} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{[j/2]} \frac{(-1)^k k}{n-j} \binom{n-1-k}{k} \binom{n-1-2k}{j-2k} 4^{-k} \\
&= \frac{n}{n-j} \sum_{k=0}^{[j/2]} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} \binom{n-1-2k}{j-2k} 4^{-k} \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{k'=0}^{[\frac{j-2}{2}]} (-1)^{k'} \binom{n-2-k'}{k} \binom{n-2-2k'}{j-2-2k'} 4^{-k'} \\
&= \frac{n}{n-j} s_{n,j} + \frac{1}{4} s_{n-1,j-2}.
\end{aligned}$$

Für $j = 0$ und $j = 1$ hat man die Randwerte $s_{n,0} = 1$ und $s_{n,1} = n-1$ für alle j. Für $j = n-1$ erkennt man den Ausdruck $s_{n,n-1} = s_{j+1,j} = \sum_{k=0}^{[j/2]} (-1)^k \binom{j-k}{k} 4^{-k}$ als $2^{-j} U_j(1) = 2^{-j}(j+1)$. Dabei bezeichnen U_j die Tschebyscheff-Polynome 2. Art. Die Rekursionsformel zusammen mit den Randwerten bestimmt nun die $s_{n,j}$ eindeutig. Berechnet man einige Werte von $s_{n,j}$, so merkt man schnell, dass das 2^j-fache dieser Werte Binomialkoeffizienten sind, und man wird zur Vermutung geführt, dass

$$s_{n,j} = \frac{1}{2^j} \binom{2n-1-j}{j}.$$

Tatsächlich genügt dieser Ausdruck den obigen Randbedingungen, und auch die Überprüfung der Rekursionsformel durch Rechnen mit Fakultäten bereitet keine Probleme.

H. Widmer, Rieden

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), A.A. Jagers (Enschede, NL), M. Vowe (Therwil), R. Wyss (Flumenthal).