El. Math., *47*, (1992)

0013-6018/92/020082-03$1.50 + 0.20/0

Über Gandhis Primzahlformel

Christoph Baxa
Universität Wien

Christoph Baxa wurde 1966 in Wien geboren. Nach Besuch der Schule studierte er bis 1990 an der Universität Wien Mathematik. Derzeit arbeitet er dort an seiner Dissertation.

Ziel dieser Note ist es, einen neuen, sehr kurzen Beweis für die folgende Formel anzugeben, die ein interessantes Gegenbeispiel zur weitverbreiteten Meinung, es gäbe keine Primzahlformeln, darstellt.

Satz *Es sei* $b \in [2,+\infty)$. *Dann gilt*

$$1 < b^{p_{n+1}}\left(-\frac{1}{b}+\sum_{d\,|\,p_1\ldots p_n}\frac{\mu(d)}{b^d-1}\right) < 2,$$

woraus

$$p_{n+1} = \left[1-\frac{1}{\log b}\log\left(-\frac{1}{b}+\sum_{d\,|\,p_1\ldots p_n}\frac{\mu(d)}{b^d-1}\right)\right]$$

folgt.

Primzahlen haben die Mathematik seit jeher in besonderer Weise beschäftigt. Ihre Verteilung innerhalb der Reihe der natürlichen Zahlen ist voller Geheimnisse, und die damit zusammenhängenden Fragen haben in der Geschichte der Mathematik immer wieder die besten Kräfte zu intensiven Bemühungen angeregt. Trotz all den umfangreichen Arbeiten sind viele der Fragen aber bis heute unbeantwortet geblieben. Offensichtlich handelt es sich hier um ganz besonders schwierige und tiefliegende Probleme. — Auf den ersten Blick scheint die im vorliegenden Beitrag behandelte Primzahlformel von J. M. Gandhi dieser Erfahrung zu widersprechen. Sie liefert nämlich eine prinzipielle Möglichkeit, die Primzahlen zu berechnen. Für die praktische Bestimmung der Folge der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots$ ist sie allerdings von beschränktem Wert, denn zur Berechnung der $n+1$-sten Primzahl p_{n+1} benötigt man alle vorhergehenden Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$. In seinem Artikel liefert Chr. Baxa einen neuen, sehr kurzen Beweis von Gandhis Formel. *ust*

Dabei bezeichnet p_n die n-te Primzahl und μ die Möbiusfunktion. Man beachte folgendes: Es sei $b \in (1, +\infty)$. Falls es für $\alpha \in \mathbb{R}$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodaß $1 < b^m \alpha < b$, dann ist m dadurch eindeutig festgelegt.

J. M. Gandhi gab diese Formel (für den Fall $b = 2$) 1966 am internationalen Mathematikerkongreß in Moskau an. Sein Beweis findet sich in [**1**]. C. Vanden Eynden [**5**] gab 1972 einen Beweis mit elementaren zahlentheoretischen Mitteln an. S. W. Golomb publizierte 1974 [**2**] und 1976 [**3**] zwei Beweise, die wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffe verwenden.

Entscheidend für den Beweis des Satzes wird das folgende Lemma von I. M. Winogradow [**6**] sein.

Lemma *Es sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe, S eine endliche Menge, $g : S \to \mathbb{N}$ und $f : S \to G$ zwei Abbildungen. Dann gilt:*

$$\sum_{\substack{s\in S\\ g(s)=1}} f(s) = \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d) \sum_{\substack{s\in S\\ d\,|\,g(s)}} f(s).$$

Beweis

$$\sum_{d=1}^{\infty} \mu(d) \sum_{\substack{s\in S\\ d\,|\,g(s)}} f(s) = \sum_{s\in S} f(s) \sum_{\substack{d\geq 1\\ d\,|\,g(s)}} \mu(d) = \sum_{\substack{s\in S\\ g(s)=1}} f(s).$$

Beweis des Satzes Setzt man im Lemma $(G, +) = (\mathbb{C}, +)$ und $g(s) = (s, N)$, erhält man

$$\sum_{\substack{s\in S\\ (s,N)=1}} f(s) = \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d) \sum_{\substack{s\in S\\ d\,|\,(s,N)}} f(s) = \sum_{d\,|\,N} \mu(d) \sum_{\substack{s\in S\\ d\,|\,s}} f(s).$$

Dabei bezeichnet (s, N) den größten gemeinsamen Teiler von s und N. Setzt man nun für $S = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$, $N = p_1 \ldots p_n$ und $f(s) = b^{-s}$, so erhält man nach Durchführung des Grenzüberganges $m \to \infty$

$$\sum_{\substack{s\geq 1\\ (s,p_1\ldots p_n)=1}} b^{-s} = \sum_{d\,|\,p_1\ldots p_n} \mu(d) \sum_{\substack{s\geq 1\\ d\,|\,s}} b^{-s} = \sum_{d\,|\,p_1\ldots p_n} \frac{\mu(d)}{b^d - 1},$$

woraus

$$b^{p_{n+1}} \left(-\frac{1}{b} + \sum_{d\,|\,p_1\ldots p_n} \frac{\mu(d)}{b^d - 1} \right) = 1 + \sum_{\substack{s>p_{n+1}\\ (s,p_1\ldots p_n)=1}} b^{p_{n+1}-s}$$

folgt. Nun ist

$$0 < \sum_{\substack{s>p_{n+1}\\ (s,p_1\ldots p_n)=1}} b^{p_{n+1}-s} < \sum_{k=1}^{\infty} b^{-k} = \frac{1}{b-1} \leq 1,$$

woraus sich sofort die erste Behauptung ergibt. Aus dieser folgt die zweite durch einfache Umformung.

K. S. S. Namboodiripad [**4**] gab 1971 eine Verallgemeinerung von Gandhis Formel an. Sein Beweisgang kann durch die Verwendung obigen Lemmas stark verkürzt werden.

Literatur

[1] J. M. Gandhi, Formulae for the nth prime, in Proc. Washington State Univ. Conf. Number Theory 1971, 96–106

[2] S. W. Golomb, A direct interpretation of Gandhi's formula, Amer. Math. Monthly 81 (1974) 752–754

[3] S. W. Golomb, Formulas for the next prime, Pacific J. Math. 63 (1976) 401–404

[4] K. S. S. Namboodiripad, A note on formulae for the nth prime, Monatsh. Math. 75 (1971) 256–262

[5] C. Vanden Eynden, A proof of Gandhi's formula for the nth prime, Amer. Math. Monthly 79 (1972) 625

[6] I. M. Winogradow, Elemente der Zahlentheorie, Oldenburg, München 1956, 17–18

Christoph Baxa
Lerchengasse 14/2/8
A–2340 Moedling