

# Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **46 (1991)**

Heft 1

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

much better estimated by the multinomial coefficient  $\binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n} = \binom{6n}{n, 2n, 3n}$  than by  $\binom{2n}{n}$  as it is usually done. An even better approximation is furnished by the multinomial coefficient used in lemma 2.2.

In conclusion I would like to offer to those who like primes with nice digit patterns two new examples, namely  $p = 1\ 22\ 333\ 221$  and  $q = 1\ 22\ 333\ 4444\ 55555\ 4444\ 333\ 221$ .

Ulrich Felgner, Mathematisches Institut der Universität Tübingen

REFERENCES

- 1 Apostol T. M.: Introduction to Analytic Number Theory. Springer, New York, Heidelberg, Berlin 1976.
- 2 Costa Pereira N.: Sharp elementary estimates for the sequence of primes. Portugaliae Math. 43, 399–406 (1986).
- 3 Hua L. K.: Introduction to Number Theory. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1982.
- 4 Nair M.: On Chebyshev-type inequalities for primes. Amer. Math. Monthly 89, 126–129 (1982).
- 5 Rosser J. B. and Schoenfeld L.: Approximate formulas for some functions of prime numbers. Illinois J. of Math. 6, 64–94 (1962).
- 6 Sierpiński W.: Elementary Theory of Numbers. Państwowl Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1964.
- 7 Trost E.: Primzahlen. Birkhäuser, Basel, Stuttgart 1968.

© 1991 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/91/05117-13\$1.50 + 0.20/0

## Kleine Mitteilungen

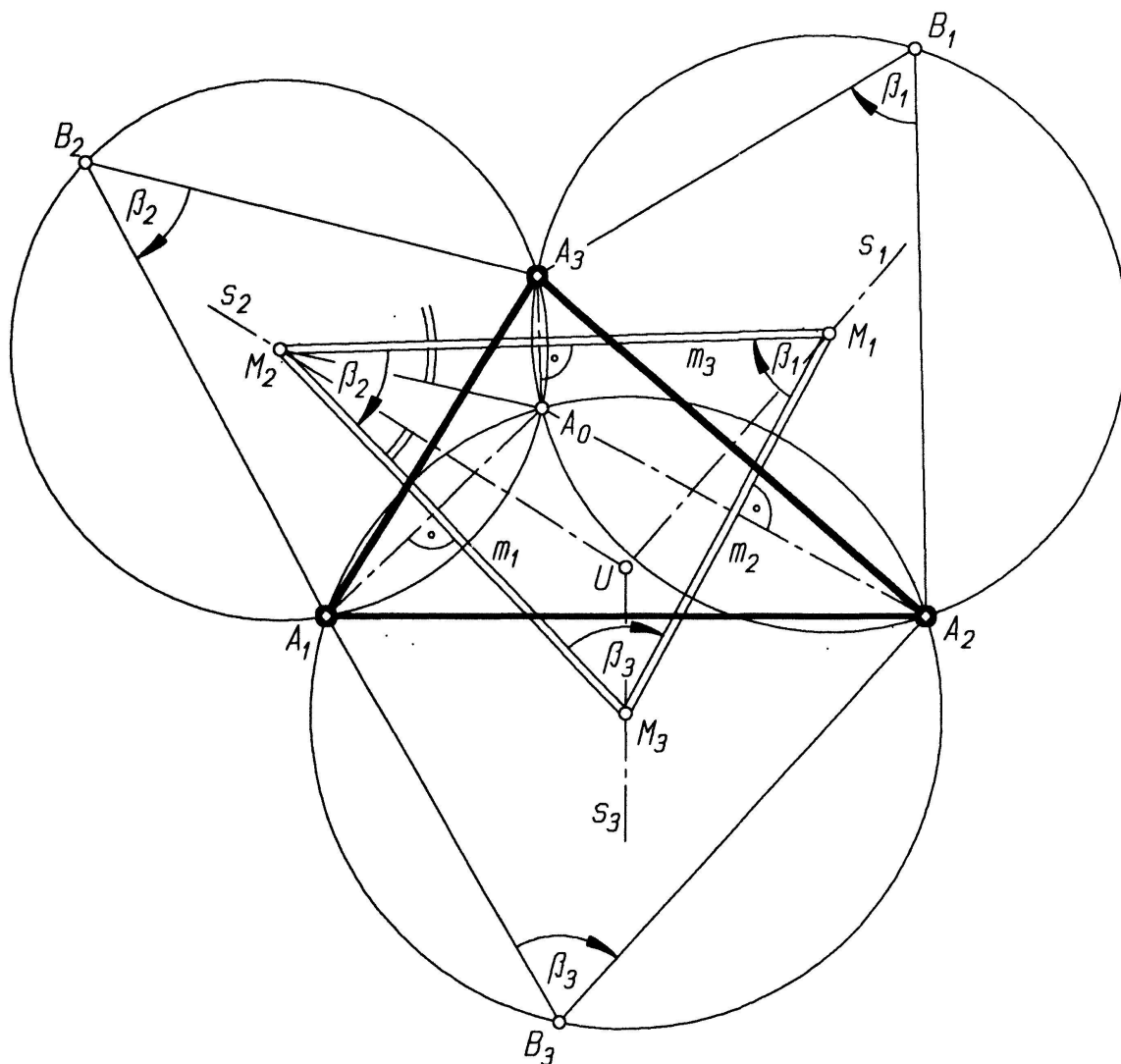
### Zu K. Schüttes Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon

In [2] und [3] bewies K. Schütte den folgenden

**Satz 1** *Den Seiten des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  seien Dreiecke  $A_2 A_3 B_1$ ,  $A_3 A_1 B_2$ ,  $A_1 A_2 B_3$  aufgesetzt, und zwar entweder alle nach außen oder alle nach innen. Für die Innenwinkel  $\beta_i$  bei  $B_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  gelte  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi$  (siehe Abb. 1). Dann bilden die Umkreismittelpunkte  $M_1, M_2, M_3$  der Aufsatzdreiecke ein Dreieck mit den Innenwinkeln  $\beta_1, \beta_2$  und  $\beta_3$ , sofern nicht alle drei Umkreismitten zusammenfallen.*

Im folgenden wird ein vereinfachter Beweis dieses Satzes gezeigt:

Nach dem Satz vom Zentriwinkel ist die Umkreismitte  $M_i$  für jede gerade Permutation  $(i, j, k)$  von  $(1, 2, 3)$  das Zentrum einer Drehung  $\delta_i$  durch den Winkel  $2\beta_i$ , die  $A_j$  in  $A_k$  überführt. Wegen der vorausgesetzten Lage der Aufsatzdreiecke erfolgen alle drei Drehungen in demselben Sinn. Das Produkt  $\delta_1 \delta_2 \delta_3$  ist eine Bewegung mit dem Drehwinkel  $2\pi$ , die  $A_2$  fix läßt, also die Identität. Da – wie vorausgesetzt – die Drehzentren verschieden sind, bilden sie ein Dreieck  $M_1 M_2 M_3$  mit den halben Drehwinkeln  $\beta_1, \beta_2$  und  $\beta_3$  als Innenwinkeln. Dies läßt sich bekanntlich wie folgt zeigen:



Wir setzen die Drehung  $\delta_2$  aus der Spiegelung  $\mu_3$  an der Verbindungsgeraden  $m_3 = M_1 M_2$  und der Spiegelung  $\mu_1$  an der unter  $\beta_2$  verdrehten Geraden  $m_1$  durch  $M_2$  zusammen. Analog ist  $\delta_1 = \mu_2 \mu_3$ , wobei für die Achse  $m_2$  der Geradenspiegelung  $\mu_2 \times m_2 m_3 = \beta_1$  gilt. Nun fällt wegen  $\delta_3^{-1} = \delta_1 \delta_2 = \mu_2 \mu_1$  der Fixpunkt  $M_3$  von  $\delta_3$  in den Schnittpunkt von  $m_1$  und  $m_2$ . Analog ist  $\times m_1 m_2 = \beta_3$ .

Dazu noch einige ergänzende Bemerkungen:

- a) Aus  $\delta_i = \mu_j \mu_k: A_j \mapsto A_k$ , also  $A_j \mu_j \mu_k = A_k$  folgt  $A_0 := A_1 \mu_1 = A_2 \mu_2 = A_3 \mu_3$ . Dieses gemeinsame Spiegelbild  $A_0$  liegt auf den Umkreisen aller drei Aufsatzdreiecke (vgl. [3], Lemma 3 und 5).
- b) Der Punkt  $A_0$  ist bezüglich des Dreiecks  $M_1 M_2 M_3$  isogonaler Gegenpunkt zur Umkreismitte  $U$  von  $A_1 A_2 A_3$ .

**Beweis:**  $M_i$  liegt auf der Symmetrale  $s_i$  der Seite  $A_j A_k$ . Die Drehung um  $M_i$  durch den Winkel  $\beta_i$  führt die Verbindungsgerade  $M_i A_j$  in die Symmetrale  $s_i$  und gleichzeitig die Gerade  $m_j$  in  $m_k$  über. Wegen  $A_0 := A_j \mu_j$  entsprechen die Geraden  $M_i A_0$  und  $M_i U$  einander in der isogonalen Verwandtschaft bzgl.  $M_1 M_2 M_3$ .

c) Nach einer Mitteilung von E. Domkowitzsch gilt folgender

**Zusatz:** Werden in Satz 1 alle drei Aufsatzdreiecke untereinander gleichsinnig ähnlich gewählt, d. h. haben diese bei  $A_i$  stets den Innenwinkel  $\beta_i$  für  $i = 1, 2, 3$  (Abb. 1 zeigt diese Annahme), so gehen alle drei Verbindungsgeraden  $A_1 B_1$ ,  $A_2 B_2$ ,  $A_3 B_3$  durch den Punkt  $A_0$ .

**Beweis:** Die Dreiecke  $A_1 B_2 A_2$  und  $A_1 A_3 B_3$  sind einander gleichsinnig ähnlich, weil sie im Innenwinkel bei  $A_1$  und im Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen. Da die Geraden  $A_1 B_2$  und  $A_1 A_3$  den Winkel  $\beta_1$  einschließen, gilt dies auch für die Seiten  $A_2 B_2$  und  $A_3 B_3$ . Nach dem Peripheriewinkelsatz schneiden die beiden Seiten einander auf den Umkreisen der zwei Aufsatzdreiecke durch  $A_1$ . Also liegt  $A_0$  auf  $A_2 B_2$  und  $A_3 B_3$  und analog auf  $A_1 B_1$ .

Im Sonderfall  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 60^\circ$  ergibt sich abermals eine bekannte Teilaussage des Satzes von Napoleon (vgl. [1]).

H. Stachel, TU Wien

#### LITERATUR

- 1 Coxeter H. S. M.: Unvergängliche Geometrie. Birkhäuser Verlag, Basel 1963.
- 2 Schütte K.: Eine Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon. Mathematische Semesterberichte 34, 256–268 (1987).
- 3 Schütte K.: Neue Fassung einer Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon. El. Math., Vol. 44, 133–138 (1989).

© 1991 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/91/05125-03\$ 1.50 + 0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 1025.** Gegeben ist die diophantische Gleichung

$$(x + y + z + t)^2 = x y z t \quad (1)$$

a) Man beweise, dass (1) unendlich viele Lösungen

$$(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4$$

besitzt.

b) Man ermittle alle Lösungen von (1), welche den Nebenbedingungen

$$x \leq y \leq z \leq t, \quad x + y + z \geq t$$

genügen.

J. Sándor, Jud. Harghita, Rumänien  
G. Berger, Tg-Mureş, Rumänien