# Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **46 (1991)**

Heft 1

PDF erstellt am: **21.09.2024**

much better estimated by the multinomial coefficient $\binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n} = \binom{6n}{n, 2n, 3n}$ than by $\binom{2n}{n}$ as it is usually done. An even better approximation is furnished by the multinomial coefficient used in lemma 2.2.

In conclusion I would like to offer to those who like primes with nice digit patterns two new examples, namely $p = 1\,22\,333\,22\,1$ and $q = 1\,22\,333\,4444\,55555\,4444\,333\,22\,1$.

Ulrich Felgner, Mathematisches Institut der Universität Tübingen

REFERENCES

1 Apostol T. M.: Introduction to Analytic Number Theory. Springer, New York, Heidelberg, Berlin 1976.
2 Costa Pereira N.: Sharp elementary estimates for the sequence of primes. Portugaliae Math. 43, 399–406 (1986).
3 Hua L. K.: Introduction to Number Theory. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1982.
4 Nair M.: On Chebyshev-type inequalities for primes. Amer. Math. Monthly *89*, 126–129 (1982).
5 Rosser J. B. and Schoenfeld L.: Approximate formulas for some functions of prime numbers. Illinois J. of Math. *6*, 64–94 (1962).
6 Sierpiński W.: Elementary Theory of Numbers. Państwowl Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1964.
7 Trost E.: Primzahlen. Birkhäuser, Basel, Stuttgart 1968.

 0013-6018/91/05117-13$1.50+0.20/0

# Kleine Mitteilungen

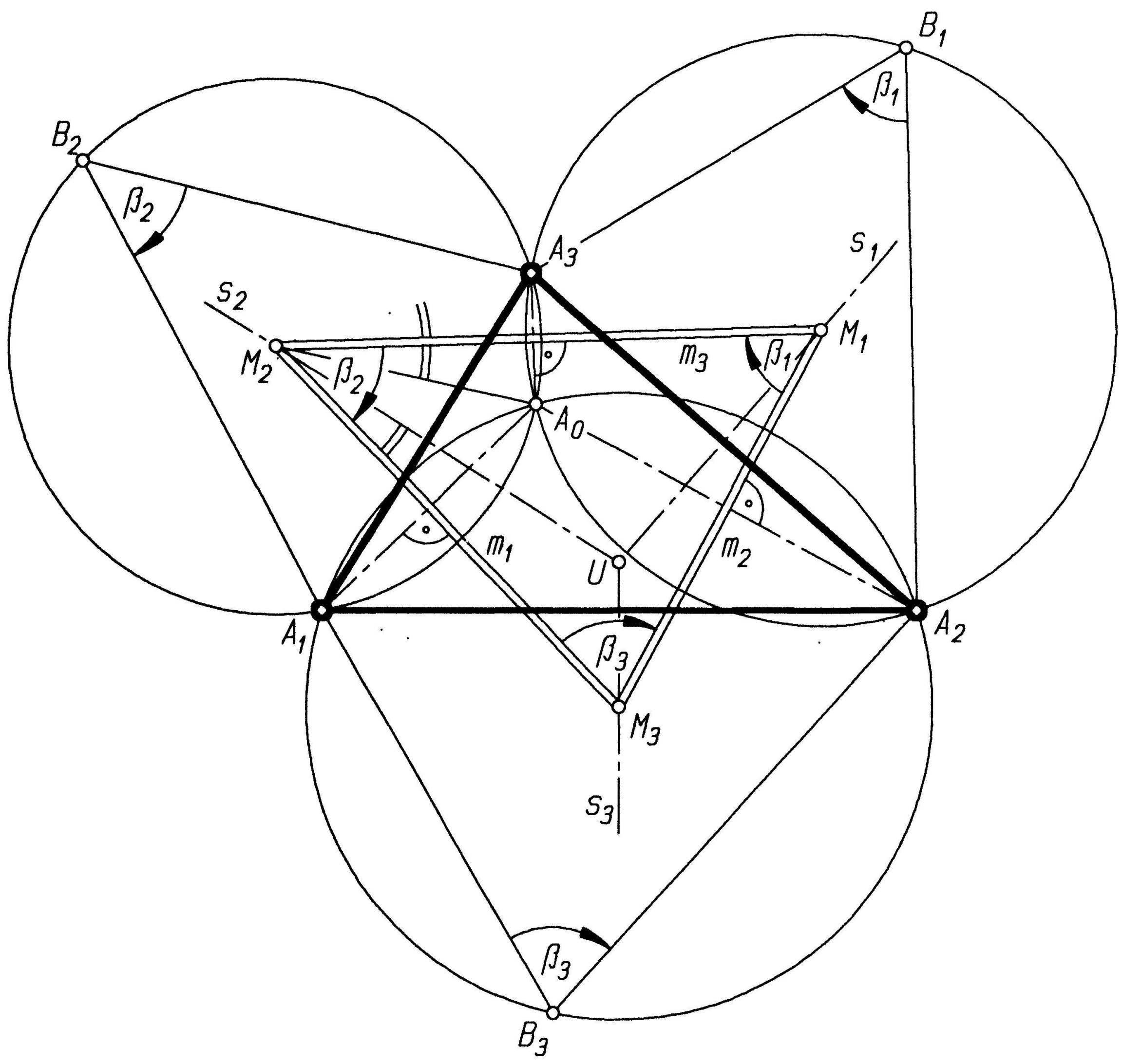
## Zu K. Schüttes Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon

In [2] und [3] bewies K. Schütte den folgenden

**Satz 1** *Den Seiten des Dreiecks* $A_1A_2A_3$ *seien Dreiecke* $A_2A_3B_1$, $A_3A_1B_2$, $A_1A_2B_3$ *aufgesetzt, und zwar entweder alle nach außen oder alle nach innen. Für die Innenwinkel* $\beta_i$ *bei* $B_i$, $i = 1, 2, 3$ *gelte* $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi$ *(siehe Abb. 1). Dann bilden die Umkreismittelpunkte* $M_1, M_2, M_3$ *der Aufsatzdreiecke ein Dreieck mit den Innenwinkeln* $\beta_1$, $\beta_2$ *und* $\beta_3$, *sofern nicht alle drei Umkreismitten zusammenfallen.*

Im folgenden wird ein vereinfachter Beweis dieses Satzes gezeigt:

Nach dem Satz vom Zentriwinkel ist die Umkreismitte $M_i$ für jede gerade Permutation $(i, j, k)$ von $(1, 2, 3)$ das Zentrum einer Drehung $\delta_i$ durch den Winkel $2\beta_i$, die $A_j$ in $A_k$ überführt. Wegen der vorausgesetzten Lage der Aufsatzdreiecke erfolgen alle drei Drehungen in demselben Sinn. Das Produkt $\delta_1\delta_2\delta_3$ ist eine Bewegung mit dem Drehwinkel $2\pi$, die $A_2$ fix läßt, also die Identität. Da – wie vorausgesetzt – die Drehzentren verschieden sind, bilden sie ein Dreieck $M_1M_2M_3$ mit den halben Drehwinkeln $\beta_1$, $\beta_2$ und $\beta_3$ als Innenwinkeln. Dies läßt sich bekanntlich wie folgt zeigen:




Wir setzen die Drehung $\delta_2$ aus der Spiegelung $\mu_3$ an der Verbindungsgeraden $m_3 = M_1 M_2$ und der Spiegelung $\mu_1$ an der unter $\beta_2$ verdrehten Geraden $m_1$ durch $M_2$ zusammen. Analog ist $\delta_1 = \mu_2 \mu_3$, wobei für die Achse $m_2$ der Geradenspiegelung $\mu_2 \sphericalangle m_2 m_3 = \beta_1$ gilt. Nun fällt wegen $\delta_3^{-1} = \delta_1 \delta_2 = \mu_2 \mu_1$ der Fixpunkt $M_3$ von $\delta_3$ in den Schnittpunkt von $m_1$ und $m_2$. Analog ist $\sphericalangle m_1 m_2 = \beta_3$.

Dazu noch einige ergänzende Bemerkungen:

a) Aus $\delta_i = \mu_j \mu_k$: $A_j \mapsto A_k$, also $A_j \mu_j \mu_k = A_k$ folgt $A_0 := A_1 \mu_1 = A_2 \mu_2 = A_3 \mu_3$. *Dieses gemeinsame Spiegelbild $A_0$ liegt auf den Umkreisen aller drei Aufsatzdreiecke* (vgl. [3], Lemma 3 und 5).

b) *Der Punkt $A_0$ ist bezüglich des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ isogonaler Gegenpunkt zur Umkreismitte $U$ von $A_1 A_2 A_3$.*

**Beweis:** $M_i$ liegt auf der Symmetralen $s_i$ der Seite $A_j A_k$. Die Drehung um $M_i$ durch den Winkel $\beta_i$ führt die Verbindungsgerade $M_i A_j$ in die Symmetrale $s_i$ und gleichzeitig die Gerade $m_j$ in $m_k$ über. Wegen $A_0 := A_j \mu_j$ entsprechen die Geraden $M_i A_0$ und $M_i U$ einander in der isogonalen Verwandtschaft bzgl. $M_1 M_2 M_3$.

c) Nach einer Mitteilung von E. Domkowitsch gilt folgender

**Zusatz:** *Werden in Satz 1 alle drei Aufsatzdreiecke untereinander gleichsinnig ähnlich gewählt, d.h. haben diese bei $A_i$ stets den Innenwinkel $\beta_i$ für $i = 1, 2, 3$ (Abb. 1 zeigt diese Annahme), so gehen alle drei Verbindungsgeraden $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ durch den Punkt $A_0$.*

**Beweis:** Die Dreiecke $A_1 B_2 A_2$ und $A_1 A_3 B_3$ sind einander gleichsinnig ähnlich, weil sie im Innenwinkel bei $A_1$ und im Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen. Da die Geraden $A_1 B_2$ und $A_1 A_3$ den Winkel $\beta_1$ einschließen, gilt dies auch für die Seiten $A_2 B_2$ und $A_3 B_3$. Nach dem Peripheriewinkelsatz schneiden die beiden Seiten einander auf den Umkreisen der zwei Aufsatzdreiecke durch $A_1$. Also liegt $A_0$ auf $A_2 B_2$ und $A_3 B_3$ und analog auf $A_1 B_1$.
Im Sonderfall $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 60°$ ergibt sich abermals eine bekannte Teilaussage des Satzes von Napoleon (vgl. [1]).

H. Stachel, TU Wien

LITERATUR


1 Coxeter H. S. M.: Unvergängliche Geometrie. Birkhäuser Verlag, Basel 1963.
2 Schütte K.: Eine Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon. Mathematische Semesterberichte *34*, 256–268 (1987).
3 Schütte K.: Neue Fassung einer Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon. El. Math., Vol. *44*, 133–138 (1989).


 0013-6018/91/05125-03$1.50+0.20/0

# Aufgaben

**Aufgabe 1025.** Gegeben ist die diophantische Gleichung

$$(x+y+z+t)^2 = x\,y\,z\,t \tag{1}$$

a) Man beweise, dass (1) unendlich viele Lösungen

$$(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4$$

besitzt.
b) Man ermittle alle Lösungen von (1), welche den Nebenbedingungen

$$x \leq y \leq z \leq t, \quad x+y+z \geq t$$

genügen.

J. Sàndor, Jud. Harghita, Rumänien
G. Berger, Tg-Mureş, Rumänien