

Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **45 (1990)**

Heft 4

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Aufgaben

Aufgabe 1013. Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ ist die Summe

$$S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left\{ \binom{n}{2k+1} + \frac{1}{2} \binom{n+1}{2k+1} - \frac{1}{4} \binom{n+2}{2k+1} \right\} 5^k$$

geschlossen auszuwerten.

L. Kuipers, Sierre

Lösung. Mit Hilfe der bekannten Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

$$\binom{n+1}{v} = \binom{n}{v} + \binom{n}{v-1}, \quad n, v \in \mathbb{N}$$

bestätigt man leicht die Richtigkeit der Identität

$$\binom{n}{2k+1} + \frac{1}{2} \binom{n+1}{2k+1} - \frac{1}{4} \binom{n+2}{2k+1} = \frac{5}{4} \binom{n}{2k+1} - \frac{1}{4} \binom{n}{2k-1} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Für S_n ergibt sich dann

$$S_n = \frac{5n}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 5^{k+1} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k-1} 5^k.$$

Wird in der ersten Summe k durch $k-1$ ersetzt und der einzelne Summand mit in diese Summe hineingenommen, erhält man

$$S_n = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k-1} 5^k - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k-1} 5^k = \frac{1}{4} \left(2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} - 1 \right) 5^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}.$$

Der Ausdruck rechts ist

$$S_n = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot 5^m & \text{für } n = 2m - 1 \\ \frac{m}{2} \cdot 5^m & \text{für } n = 2m \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N}),$$

wofür sich auch schreiben lässt:

$$S_n = \frac{1 + (n-1) \cos^2(\pi n/2)}{4} 5^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

F. Götze, Jena, DDR

Weitere Lösungen sandten G. Bercea (München, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), J. Binz (Bolligen), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Sakmann (Bern), H.-J. Seiffert (Berlin), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), B. M. M. de Weger (Enschede, NL), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

Aufgabe 1014. A circle meets each side of a regular n -gon, $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ in two points. The circle cuts side $A_i A_{i+1}$ (with $A_{n+1} = A_1$) in points B_i and C_i with B_i lying between A_i and A_{i+1} and C_i lying between B_i and A_{i+1} . Prove that

$$\sum_{i=1}^n |A_i B_i| = \sum_{i=1}^n |C_i A_{i+1}|.$$

S. Rabinowitz, Westford, USA

Solution. We shall prove a much more general fact: Let A_1, A_2, \dots, A_n ($A_{n+1} = A_1$) be an n -tuple of points in the plane. Let a circle meet the (infinite) line $A_i A_{i+1}$ in the points B_i and C_i ($i = 1, \dots, n$).

Then the inner product sums

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{(A_i A_{i+1}, A_i B_i)} \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^n \overrightarrow{(A_i A_{i+1}, C_i A_{i+1})}$$

are equal

Proof. It is well known that for $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(A_i B_i, A_i C_i)} &= \overrightarrow{(A_i B_{i-1}, A_i C_{i-1})}, \quad \text{or} \\ \overrightarrow{(A_i B_i, A_i A_{i+1} + A_{i+1} C_i)} &= \overrightarrow{(A_i A_{i-1} + A_{i-1} B_{i-1}, A_i C_{i-1})}. \end{aligned}$$

Summation for $i = 1, \dots, n$ and cancellation of identical terms on both sides yields

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{(A_i B_i, A_i A_{i+1})} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{(A_i A_{i-1}, A_i C_{i-1})},$$

from which our claim follows.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten G. Bercea (München, BRD), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Hohler (Olten), H. Irminger (Wetzikon), L. Kuipers (Sierre), J. Waldmann (Jena, DDR), H. Walser (Frauenfeld), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

Aufgabe 1015. Die Zahlenfolge (a_n) sei durch $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3$ und die Rekursion

$$\begin{vmatrix} 1 & a_n & a_{n-1} \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-3} \end{vmatrix} = 1 \quad (n \geq 3)$$

gegeben. Man bestimme a_n als Funktion von n und berechne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/a_{n+1}).$$

J. Binz, Bolligen

Lösung. Die angegebene Rekursion kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$(a_n - a_{n-1})(a_{n-2} - a_{n-3}) = 1 + (a_{n-1} - a_{n-2})^2 \tag{1}$$

Ein Vergleich der Zahlenfolge (a_n) mit der Fibonacci-Folge (F_n) liefert die Vermutung, dass:

$$a_n = a_{n-1} + F_{2n-3}, \quad n \geq 2 \tag{2}$$

Es kann leicht gezeigt werden, dass (2) stimmt: (2) in (1) eingeführt ergibt folgende bekannte Beziehung ([1], Formel 1.10):

$$F_{2n-3} \cdot F_{2n-5} = 1 + F_{2n-4}^2. \tag{3}$$

Schreibt man (2) für $n = 2, 3, \dots, n$ und addiert diese Gleichungen gliedweise, so erhält man unter Benutzung der Identität 1.2 aus [1]:

$$a_n = a_1 + F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-3} = 2 + F_{2n-2} \tag{4}$$

d.h. ([1], S. 27):

$$a_n = 2 + \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{2n-2} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{2n-2} \right] / \sqrt{5} \tag{5}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/a_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + F_{2n-2}) / (2 + F_{2n}) = (3 - \sqrt{5})/2.$$

G. Bercea, München, BRD

LITERATUR

1 Worobjow N. N.: Die Fibonacci'schen Zahlen. Dritte Auflage. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin 1977.

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), J. Fehér (Pécs, Ungarn), F. Götze (Jena, DDR), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), A. Müller (Zürich), H.-J. Seiffert (Berlin), P. Streckeisen (Zürich), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), H. Walser (Frauenfeld), B. M. M. de Weger (Enschede, NL), P. Weisenhorn (Achern, BRD), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 1016. Für nichtnegative reelle Zahlen x, y, z beweise man die Ungleichung

$$(\sqrt{(x+y+z+1)^2 + 4xyz} - x - y - z + 1)(yz + zx + xy) \geq 6xyz.$$

Wann genau gilt das Gleichheitszeichen?

W. Janous, Innsbruck, A

Obviously the inequality is true if one of the variables vanishes, with equality if two or all of them are zero. So let us suppose that $xyz > 0$.

Then we have to study the positivity of the expression

$$\sqrt{(x+y+z+1)^2 + 4xyz} - (x+y+z-1 + 6(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1})^{-1}),$$

or, in terms of the harmonic, geometric and arithmetic means H, G and A we have to investigate

$$\sqrt{(3A+1)^2 + 4G^3} - \{(3A+1) + 2(H-1)\},$$

the positiveness of which, because its first term is positive, is warranted by the positiveness of

$$4F(A, G, H) := (3A+1)^2 + 4G^3 - \{(3A+1) + 2(H-1)\}^2.$$

Besides the well-known inequality $A \geq H$ we mention the inequality $G^3 \geq AH^2$, which follows easily from

$$\begin{aligned} 27H^{-3}(G^3 - AH^2) &= xyz(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1})^3 - 3(x+y+z)(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}(xyz)(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1})\{(x^{-1} - y^{-1})^2 + (x^{-1} - z^{-1})^2 + (y^{-1} - z^{-1})^2\} \geq 0 \end{aligned}$$

with equality iff $x = y = z$.

Finally, $H^2 - 3H + 3$ is positive definite, so that we get

$$\begin{aligned} F(A, G, H) &\geq AH^2 - (H-1)(3A+H) = A(H^2 - 3H + 3) - H^2 + H \\ &\geq H(H^2 - 3H + 3) - H^2 + H = H(H-2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

with equality iff $H = 2$ and hence $x = y = z = 2$, which also yields equality in the original expressions.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), H.-J. Seiffert (Berlin), H. Widmer (Rieden).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis 10. Februar 1991 an Dr. H. Kappus. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68), Problem 872 A (Band 36, S. 175), Aufgabe 880 (Band 37, S. 93).

Aufgabe 1034. Unter einem perfekten Quader versteht man einen Quader mit ganzzahligen Seiten s_i , ganzzahligen Flächendiagonalen f_i ($i = 1, 2, 3$) und ganzzahliger Raumdiagonale r . Man zeige: Für perfekte Quader gilt

$$s_1 s_2 s_3 f_1 f_2 f_3 r \equiv 0 \pmod{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 37}.$$

H. Bergmann, Hamburg, BRD

Aufgabe 1035. Es seien n Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt gegeben. Je zwei im positiven Drehsinn aufeinanderfolgende Strahlen schliessen Winkel $\alpha_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) ein. Unter welchen Bedingungen sind die Trägergeraden der gegebenen Strahlen die Mittelsenkrechten der Seiten eines n -Ecks?

W. Moldenhauer, K. Wetwischka, Erfurt, DDR

Aufgabe 1036. Es seien x_1, \dots, x_n paarweise voneinander verschiedene reelle Zahlen mit

$$m = \min_{1 \leq i \leq n} x_i < 0 < \max_{1 \leq i \leq n} x_i = M.$$

Wenn mit $A(x)$ bzw. $A(x^2)$ das arithmetische Mittel von x_1, \dots, x_n bzw. x_1^2, \dots, x_n^2 bezeichnet wird, dann gilt für $n \geq 3$:

$$m + \frac{n^2}{m(n-1)(n-2)} \left[A(x)^2 - \frac{1}{n} A(x^2) \right] < 2A(x) < M + \frac{n^2}{M(n-1)(n-2)} \left[A^2(x) - \frac{1}{n} A(x^2) \right].$$

H. Alzer, Johannesburg, Südafrika