Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **44 (1989)**

Heft 4

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

REFERENCES

1 Dobbs D. E.: Proving Heron's formula tangentially. College Math. J. *15*, 252–253 (1984).
2 Dobbs D. E.: A classroom note on the tangent expansion formula. Computer and Math. Educ. J. *18*, 119–120 (1984).
3 Dobbs D. E.: A trigonometry-based method for constructing square roots by straight-edge and compass. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. *15*, 127–128 (1984).
4 Dobbs D. E.: A tangential approach to central angles. Illinois Math. Teacher *36*, 18–23 (1985)
5 Dobbs D. E.: The law of tangents: a new proof and an application. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. *19*, 759–763 (1988).

© 1989 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/89/040101-04$1.50 + 0.20/0

Kleine Mitteilungen

An explicit formula about the convex hull of random points

Denote by $V_n^{(d)}$ the expected volume of the convex hull of n points chosen independently according to a given probability measure μ in Euclidean d-space E^d. For $d = 2, 3$ and μ the uniform distribution on a convex body in E^d, Affentranger [1], [2] has shown that

$$V_{d+2m}^{(d)} = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \binom{d+2m}{2k-1} V_{d+2m-2k+1}^{(d)} \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

where the γ_k can be obtained recursively from $\gamma_1 = \frac{1}{2}$, $2\gamma_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{2k-1}{2i-1} \gamma_i (k \geq 2)$.

Recently, Buchta [3] has extended this result to arbitrary dimensions d and to arbitrary probability measures μ on E^d. The key point in [3] is the existence of a moment functional $\mathcal{M}$ such that

$$V_{d+1+n}^{(d)} = \binom{d+1+n}{d+1} \mathcal{M}(x^n + (1-x)^n). \tag{2}$$

(See [4] for the definition of moment functionals.)
In this note we show that in formula (1) the γ_k can be expressed explicitly by

$$\gamma_k = (2^{2k} - 1)\frac{B_{2k}}{k} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Here the B_n are the *Bernoulli numbers* (see e.g. [5], section 1.13), defined by the generating series $z/(e^z - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n/n!$. In our proof of formula (1) we can avoid the elimination process used in [1].

The *Euler polynomials* $E_n(x)$ (see e.g. [5], section 1.14) are defined by the generating series

$$\frac{2e^{xz}}{e^z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{z^n}{n!} \quad (|z| < \pi). \tag{4}$$

Usually, the Euler polynomials are expanded in powers of $x - \frac{1}{2}$. We need the less known expansion in powers of x. Thus put $\tilde{B}_n = E_n(0)$. Then the numbers $\tilde{B}_n$ are defined by the generating series

$$\frac{2}{e^z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_n\frac{z^n}{n!} \quad (|z| < \pi). \tag{5}$$

Differentiation of $2/(e^z+1)$ gives the even function $-2e^z/(e^z+1)^2$; hence $\tilde{B}_{2n} = 0$ for $n \geq 1$. Since

$$\frac{2z}{e^z+1} = \frac{2z}{e^z-1} - \frac{4z}{e^{2z}-1},$$

we can also express $\tilde{B}_n$ in terms of the Bernoulli number B_{n+1}:

$$\tilde{B}_n = -(2^{n+1}-1)\frac{2B_{n+1}}{n+1}. \tag{6}$$

We read off from (4) that $E_0(x) = 1$, $E_n'(x) = nE_{n-1}(x)$. This leads to

$$E_n(x) = x^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\tilde{B}_k x^{n-k}. \tag{7}$$

Next, we see from $2e^{(1-x)z}/(e^z+1) = 2e^{-xz}/(e^{-z}+1)$ that $E_{2m-1}(x) + E_{2m-1}(1-x) = 0$. Now we obtain the key expansion by substituting this in equation (7) and by using $\tilde{B}_{2k} = 0$:

$$x^{2m-1} + (1-x)^{2m-1} = -\sum_{k=1}^{m}\binom{2m-1}{2k-1}\tilde{B}_{2k-1}(x^{2m-2k} + (1-x)^{2m-2k}). \tag{8}$$

Finally we use expression (2) for $V_{d+2m}^{(d)}$ and substitute it into equation (8). This gives

$$\begin{aligned} V_{d+2m}^{(d)} &= -\binom{d+2m}{d+1}\sum_{k=1}^{m}\binom{2m-1}{2k-1}\tilde{B}_{2k-1}\binom{d+2m-2k+1}{d+1}^{-1} V_{d+2m-2k+1}^{(d)} \\ &= -\sum_{k=1}^{m}\binom{d+2m}{2k-1}\tilde{B}_{2k-1}\, V_{d+2m-2k+1}^{(d)}. \end{aligned}$$

In view of (6), this proves (1) and (3).

E. Badertscher, Mathematisches Institut der Universität Bern

REFERENCES

1 Affentranger F.: Generalization of a formula of C. Buchta about the convex hull of random points. Elem. Math. *43*, 39–45 (1988).
2 Affentranger F.: Remarks on the note "Generalization of a formula of C. Buchta about the convex hull of random points". Elem. Math. *43*, 151–152 (1988).
3 Buchta C.: Distribution Independent Properties of the Convex Hull of Random Points. Preprint (1988).
4 Chihara T. S.: An Introduction to Orthogonal Polynomials. Math. and its appl. *13*, Gordon and Breach 1978.
5 Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.: Higher Transcendental Functions, Volume I. McGraw-Hill, New York 1953.

© 1989 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/89/040104-03$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 989. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Winkel eines ebenen Dreiecks und $\alpha_1 \leqq \alpha_2, \alpha_3$. Dann gilt die Ungleichung

$$\alpha_1 \leqq 2 \operatorname{arc\,cot}(\sqrt{3} + \sum(1/\alpha_i) - 9/\pi)$$

mit Gleichheit genau im gleichseitigen Fall. Dies ist zu beweisen.

V. D. Mascioni, Origlio

Lösung. O.B.d.A. darf noch $\alpha_2 \leqq \alpha_3$ vorausgesetzt werden, was mit $\alpha_2 \leqq (\pi - \alpha_1)/2$ äquivalent ist. Da die behauptete Ungleichung mit

$$(*) \quad \cot(\alpha_1/2) - 1/\alpha_1 + 9/\pi - \sqrt{3} \geqq 1/\alpha_2 + 1/(\pi - \alpha_1 - \alpha_2)$$

für $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq (\pi - \alpha_1)/2$ gleichbedeutend ist, wobei $0 < \alpha_1 \leqq \pi/3$ zu gelten hat, genügt es festzustellen, dass die rechte Seite von (*), betrachtet als Funktion von α_2, im Intervall $[\alpha_1, (\pi - \alpha_1)/2]$ monoton fällt. Daher ist (*) richtig, sobald

$$(**) \quad F(\alpha_1) := \cot(\alpha_1/2) - 2/\alpha_1 - 1/(\pi - 2\alpha_1) \geqq \sqrt{3} - 9/\pi$$

für alle $\alpha_1 \in]0, \pi/3]$ bewiesen ist. Aus $\sin^2 y \leqq y^2$ für alle reellen y folgt

$$F'(x) = -1/(2\sin^2 \tfrac{x}{2}) + 2/x^2 - 2/(\pi - 2x)^2 < -2/(\pi - 2x)^2,$$

weshalb F in $]0, \pi/3]$ streng monoton fällt. Damit ist $F(\alpha_1) \geqq F(\pi/3) = \sqrt{3} - 9/\pi$ für $0 < \alpha_1 \leqq \pi/3$ mit Gleichheit genau für $\alpha_1 = \pi/3$, d. h. im Fall der Gleichseitigkeit.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hong-Kong), B. Ruh (Zürich), P. Weisenhorn (Achern, BRD).
Eine Lösung war fehlerhaft.