4 Oppenheim A.: The Erdös Inequality and other Inequalities for a Triangle. Amer. Math. Monthly *68*, 226–230 (1961).
5 Klamkin M. S.: Triangle Inequalities via Transforms. Notices of Amer. Math. Soc., A-103, 104, Jan. 1972.
6 Mitrinović D. S., Pěcarić J. E., Volence V.: Recent Results in Geometric Inequalities. Amsterdam (to appear).
7 Klamkin M. S.: Solution to Aufgabe 677. Elem. der Math. *28*, 130 (1973).
8 Janous W.: Problem 1137. Crux Math. *12*, 79.

 0013-6018/89/020041-07$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 981. Man beweise oder widerlege folgende Aussage: Das Polynom

$$f(x) = x^5 + x - t$$

ist über $\mathbb{Z}$ irreduzibel, wenn $t = \pm p^n$, p Primzahl, $n \in \mathbb{N}$ und $p^n > 2$.

O. Buggisch, Darmstadt, BRD

Lösung. Die Aussage ist wahr.

Beweis. Sei $t = \pm q$ und q eine Primzahlpotenz. Falls ein quadratisches Polynom das Polynom $x^5 + x - t$ teilt, so ist $t = \pm 1$. Der Ansatz

$$x^5 + x - t = (x^2 + a_1 x + a_0)(x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0), \quad a_0, a_1, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$$

führt nämlich durch Koeffizientenvergleich und Elimination von b_0, b_1, b_2 sofort auf

$$3 a_0 a_1^2 - a_1^4 - a_0^2 = 1 \quad \text{und} \quad a_0 a_1 (a_1^2 - 2 a_0) = t.$$

Deshalb sind a_0 und a_1 teilerfremde Teiler der Primzahlpotenz q, woraus $a_0 = \pm 1$ oder $a_1 = \pm 1$ folgt. In beiden Fällen schliesst man $t = \pm 1$.
Falls aber ein lineares Polynom $x^5 + x - t$ teilt, so besitzt $x^5 + x - t$ eine ganzzahlige Nullstelle, also $t = \xi^5 + \xi$ für einen Teiler ξ von t; insbesondere ist t gerade. Daraus folgt $t = \pm 2$.

Bemerkung. Die Polynome $x^5 + x \pm y$ sind Beispiele für den folgenden Satz von V. G. Sprindžuk (Reducibility of polynomials and rational points on algebraic curves, Sém de Théorie des Nombres, Prog. Math. 12 (1981), 287–309). Sei $f \in \mathbb{Z}[x, y]$, absolut irreduzibel (d.h. irreduzibel in $C[x, y]$), $\deg_x f \geqq 2$, $f(0,0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq 0$; dann ist für fast alle Primzahlpotenzen q das Polynom $f(x, q)$ in $\mathbb{Z}[x]$ irreduzibel.

A. Clivio, Stanford, USA

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), A. Müller (Zürich), K. Schütte (München, BRD), M. Smid (Amsterdam, NL), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

Bemerkung der Redaktion: S. Rabinowitz zeigte inzwischen: $x^5 + x - t$ zerfällt über $\mathbb{Z}$ in irreduzible Faktoren 2. und 3. Grades g.d.w. $t = \pm 1$ oder $t = \pm 6$, siehe S. Rabinowitz: The Factorization of $x^2 \pm x + n$, Math. Magazine 61 (1988), 191–193.

Aufgabe 982. Es seien s, n, m feste natürliche Zahlen und P die Menge aller Partitionen

$$s = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

von s mit nichtnegativen ganzen Summanden k_i. Man bestimme

$$S(s,n,m) := \operatorname*{Min}_{P} \sum_{i=1}^{n} \binom{k_i}{m}.$$

J. Binz, Bolligen

Lösung. Es seien $q = [s/n]$ und $r = s - q\,n$. Angenommen, unter den Partitionssummanden von s befinden sich zwei, etwa $k_i = k$ und $k_j = l$, so daß $k \geqq l + 2$. Dann gilt

$$\binom{k}{m} + \binom{l}{m} \geqq \binom{k-1}{m} + \binom{l+1}{m} \tag{1}$$

In der Tat ist (1) äquivalent zu

$$\binom{k}{m} - \binom{k-1}{m} \geqq \binom{l+1}{m} - \binom{l}{m}, \quad \text{d.h.} \quad \binom{k-1}{m-1} \geqq \binom{l}{m-1}.$$

Wegen (1) erreicht man das Minimum, wenn die Partitionssummanden die Ungleichung $|k_i - k_j| \leqq 1$, $i,j = 1, \ldots, n$, erfüllen.
Deshalb müssen r Summanden den Wert $q + 1$ und die übrigen $n - r$ den Wert q haben.
Folglich ist

$$S(s,n,m) = (n-r)\binom{q}{m} + r\binom{q+1}{m}.$$

W. Janous, Innsbruck, A

Weitere Lösungen sandten O. P. Lossers (Eindhoven, NL) K. Schütte (München, BRD), P. Weisenhorn (Achern, BRD), C. Wildhagen (Breda, NL).

Aufgabe 983. Für $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k \geqq n$ ist die Summe

$$\sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} (z-m)^n$$

geschlossen auszuwerten.

W. Koepf, Berlin

Lösung mit Verallgemeinerung auch für $k < n$.
Mittels der binomischen Entwicklung erhält man

$$\begin{aligned} P_{n,k}(z) &:= \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} (z-m)^n = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^{n-i} (-m)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} (-m)^i \right) \binom{n}{i} z^{n-i} = (-1)^k k! \sum_{i=0}^{n} (-1)^i S(i,k) \binom{n}{i} z^{n-i}, \end{aligned}$$

wo

$$S(i,k) := \frac{1}{k!} \sum_{m=1}^{k} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} m^i, \quad S(0,0) := 1$$

die bekannten Stirlingzahlen 2. Art bezeichnen, für welche insbesondere gilt $S(i,k) = 0$ für $i < k$ und $S(k,k) = 1$ für $k \geqq 0$ (vgl. [1], [2]).
So erhält man das Resultat

$$P_{n,k}(z) \equiv \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k > n \geqq 1 \\ (-1)^k k! \sum\limits_{i=k}^{n} (-1)^i S(i,k) \binom{n}{i} z^{n-i} & \text{für} \quad 1 \leqq k < n \\ n! & \text{für} \quad k = n \geqq 0. \end{cases}$$

Bemerkungen. Diese zweiparametrige Polynomschar besitzt die erzeugenden Funktionen

$$G(z,s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(z) \frac{s^k t^n}{k!\, n!} = e^{zt} e^{s(1-e^{-t})}$$

$$H(z,s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(z) \frac{s^k t^n}{n!} = \frac{e^{zt}}{1 + s(e^{-t} - 1)}.$$

Die Polynome $P_{n,k}(z)$ können auch mit Hilfe der aus $\binom{k}{m} = \binom{k-1}{m} + \binom{k-1}{m-1}$ zu gewinnenden Rekursionsformel $P_{n,0}(z) = z^n$; $P_{n,k}(z) = P_{n,k-1}(z) - P_{n,k-1}(z-1)$ eindeutig ermittelt werden.
Weiter gilt die bemerkenswerte Umkehrformel

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} P_{n,k}(z) = (z-m)^n \quad \text{für} \quad m \in \mathbb{C}.$$

LITERATURVERZEICHNIS

1 Comtet L.: Advanced combinatorics. Reidel, Boston 1974.
2 Riordan J.: Combinatorial identities. Wiley, New York 1968.

R. Wyss, Flumenthal

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bolligen), P. Bracken (Toronto, CD), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), F. Götze (Jena, DDR), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), I. Paasche (Stockdorf, BRD), K. Schütte (München, BRD), J. Schwaiger (Graz, A), H.-J. Seiffert (Berlin), M. Smid (Amsterdam, NL), Hj. Stocker (Wädenswil), H. M. Srivastava (Victoria, CD), P. Weisenhorn (Achern, BRD), C. Wildhagen (Breda, NL), M. Vowe (Therwil).

Aufgabe 984. Es seien α, β, γ die Innenwinkel, r der Inkreisradius und R der Umkreisradius eines ebenen Dreiecks. Man zeige, dass

$$\frac{2R^2 - 2Rr - r^2}{4R^2} \leqq \sin^4(\alpha/2) + \sin^4(\beta/2) + \sin^4(\gamma/2) \leqq \frac{4R^2 - 8Rr + 3r^2}{4R^2}$$

mit Gleichheit genau im gleichseitigen Fall.

D. M. Milosevic, Pranjani, YU

Lösung. Wegen $\sin^4 x = \sin^2 x - \frac{1}{4}\sin^2 2x$ für jedes reelle x ist

$$\begin{aligned} S := {} & \sin^4\frac{\alpha}{2} + \sin^4\frac{\beta}{2} + \sin^4\frac{\gamma}{2} \\ = {} & \left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2}\right) - \frac{1}{4}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) \\ = {} & 1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$S = 1 - \frac{r}{2R} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{16R^2}$$

und somit ist die behauptete Ungleichung äquivalent mit

$$24Rr - 12r^2 \leqq a^2 + b^2 + c^2 \leqq 8R^2 + 4r^2$$

mit Gleichheit jeweils genau im gleichseitigen Fall. Diese letzte Ungleichungskette ist aber wohlbekannt (vgl. [1], S. 53).

LITERATURVERZEICHNIS

1 Bottema O. et al.: Geometric inequalities. Groningen: Wolters-Noordhoff Publ. 1969.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten S. Z. Arslanagic, (Trebinje, YU), E. Braune (Linz, Teillösung), F. Götze (Jena, DDR), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), K. Schütte (München, BRD), P. Weisenhorn (Achern, BRD), M. Vowe (Therwil).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Oktober 1989* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 1005. Man beweise: Die durch

$$x_1 = 1, \quad x_n = e - n \cdot x_{n-1} \quad (e \text{ ist die Eulersche Zahl})$$

rekursiv definierte Zahlenfolge (x_n) strebt mit wachsendem n gegen Null und divergiert (in dieser Form) bei der Berechnung auf jedem Computer.

R. Wyss, Flumenthal

Aufgabe 1006. Einem Rechteck $PQRS$ sollen $2k \geqq 4$ Kreise K_i, K_i' wie folgt eingelagert werden: K_1 berührt das Rechteck im Mittelpunkt C der Seite SP; K_2 berührt K_1 in B und das Rechteck im Mittelpunkt A der Seite QR. K_i berührt K_1, K_{i-1} und die Rechteckseite QR ($i = 3, 4, \ldots, k$, falls $k > 2$); K_{k+1} berührt K_1, K_k und die Rechteckseiten QR, RS und SP. Die Kreise K_i' ($i = 3, 4, \ldots, k+1$) sind die Spiegelbilder der Kreise K_i an der Achse AC.
Für welche Rechtecke ist eine solche Einlagerung möglich?

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 1007. In einer Ebene seien ein Dreieck Δ mit den Ecken A_1, A_2, A_3 und ein Punkt P, der auf keiner Seite von Δ liegt, gegeben. K_1 sei der Kegelschnitt, der die beiden von A_1 ausgehenden Dreiecksseiten in A_2 bzw. A_3 berührt und durch P geht. Analog sei der Kegelschnitt K_2 definiert. Die beiden Kurven besitzen ausser der Geraden $A_1 A_2$ noch eine weitere Tangente t. Man zeige: Bewegt sich P auf einer durch A_3 verlaufenden Ecktransversalen von Δ, so dreht sich t um einen festen Punkt T.

C. Bindschedler, Küsnacht

Aufgabe 1008. Man zeige, dass für beliebige reelle a, b, c

$$(a+b+c)^2 - 4(ab+bc+ca) + 3(abc)^{2/3} \geqq 0.$$

S. Gaschkov, Moskau, U.d.S.S.R.

Berichtigung: Die letzte Formelzeile in Aufgabe 1001 (Heft 1989/1) muss richtig wie folgt lauten:

$$A(k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i 4^{-i} i! \, C(i) \, S(k,i).$$