

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 44 (1989)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Eine Integralungleichung für streng monotone Funktionen mit logarithmisch konvexer Umkehrfunktion  
**Autor:** Seiffert, H.-J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-41604>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 07.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Eine Integralungleichung für streng monotone Funktionen mit logarithmisch konvexer Umkehrfunktion

In [7] wird bewiesen, dass für  $a > 0$  und  $b > 0$  die Zahl

$$I(a, b) = \frac{1}{e} (b^b/a^a)^{1/(b-a)}, \quad a \neq b, \quad I(a, a) = a$$

zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel von  $a$  und  $b$  liegt. Weitere Beweise dazu finden sich in [1], [6] und [9], Verschärfungen in [2] und [8].

In dieser Note wird eine Integralungleichung bewiesen, in der  $I(a, b)$  eine wichtige Rolle spielt. Die Aussage des folgenden vorbereitenden Lemmas wurde in [3] als Aufgabe gestellt, Lösungen finden sich in [4] und [5].

Lemma: Ist  $c > 0$ , so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{i=1}^n (c + (i-1)/n) \right)^{1/n} = \frac{(c+1)^{c+1}}{e c^c}.$$

Fortan sei  $a > 0$ ,  $b > 0$  und  $a \neq b$  vorausgesetzt.

**Satz:** *Besitzt die streng monoton wachsende Funktion  $f \in C[a, b]$  eine logarithmisch konvexe Umkehrfunktion, so gilt*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(I(a, b)).$$

*Die umgekehrte Ungleichung gilt, falls  $f$  streng monoton fällt.*

*Beweis:* O.B.d.A. sei  $a < b$ . Für jede natürliche Zahl  $n$  bildet die Menge  $\{x_i = a + (i-1)(b-a)/n \mid i=1, \dots, n+1\}$  eine Zerlegung des Intervalls  $[a, b]$ . Ist  $f$  streng monoton wachsend, so gilt  $f(a) \leq f(x_i) \leq f(b)$  f.a.  $i=1, \dots, n$ .

Da  $f$  stetig ist, gilt folglich

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \in [f(a), f(b)] = f([a, b]). \quad (*)$$

In ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass (\*) auch gilt, falls  $f$  streng monoton fällt.  $f^{-1}$  ist nach Voraussetzung logarithmisch konvex, so dass man die Ungleichung

$$f^{-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \right) \leq \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$$

erhält, deren linke Seite wegen (\*) wohldefiniert ist. Da  $f$  auf einem kompakten Intervall stetig ist, ist auch  $f^{-1}$  stetig, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \right) = f^{-1} \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right).$$

Ferner hat man aufgrund des obigen Lemmas (mit  $c = a/(b - a)$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} = I(a, b),$$

womit der Satz bewiesen ist. Q.E.D.

Man rechnet leicht nach, dass für  $f(x) = \log x$  in der Ungleichung des obigen Satzes das Gleichheitszeichen steht.

Für eine zweimal auf  $[a, b]$  differenzierbare Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt der folgende Sachverhalt:

Ist  $f'(x) > 0$  (und damit  $f$  streng monoton wachsend) auf  $[a, b]$ , so ist  $f^{-1}$  genau dann logarithmisch konvex, wenn  $f'(x) + x f''(x) \leq 0$  auf  $[a, b]$  gilt.

Ist  $f'(x) < 0$  (und damit  $f$  streng monoton fallend) auf  $[a, b]$ , so ist  $f^{-1}$  genau dann logarithmisch konvex, wenn  $f'(x) + x f''(x) \geq 0$  auf  $[a, b]$  gilt.

Beispiel: Es seien  $0 < p < 1$ ,  $0 \leq h \leq (1 - p) \min(a, b)$  und  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = (x + h)^{p-1}$ . Offensichtlich ist  $f'(x) < 0$  und  $f'(x) + x f''(x) \geq 0$  auf  $[a, b]$ , so dass nach einer der obigen Bemerkungen der Satz anwendbar ist.

Er liefert die Ungleichung

$$S_p(a + h, b + h) \leq I(a, b) + h \tag{1}$$

mit dem Stolarsky'schen Mittel [7]  $S_r(c, d)$ , das für  $c > 0$  und  $d > 0$  wie folgt definiert ist: Für alle reellen Zahlen  $r \neq 0, 1$  sei

$$S_r(c, d) = \left( \frac{c^r - d^r}{r(c - d)} \right)^{1/(r-1)}, \quad c \neq d, \quad S_r(c, c) = c,$$

sowie  $S_1(c, d) = I(c, d)$ ,  $S_0(c, d) = L(c, d)$  mit dem logarithmischen Mittel

$$L(c, d) = \frac{c - d}{\log c - \log d}, \quad c \neq d, \quad L(c, c) = c.$$

Lässt man in (1)  $p$  gegen 0 streben, so erhält man

$$L(a + h, b + h) \leq I(a, b) + h \quad \text{für } 0 \leq h \leq \min(a, b).$$

Für  $h = 0$  sind diese Ungleichungen bekannt [7].

LITERATUR

- 1 Alzer H.: Über einen Wert, der zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel zweier Zahlen liegt. *El. Math.* 40, 22–24 (1985).
- 2 Alzer H.: Ungleichungen für  $(e/a)^a (b/e)^b$ . *El. Math.* 40, 120–123 (1985).
- 3 Euler R.: Problem 1178. *Math. Mag.* 56, 326 (1983).
- 4 Klein B. G.: Solution I of 1178. *Math. Mag.* 57, 302 (1984).
- 5 Seiffert H.-J.: Solution II of 1178. *Math. Mag.* 57, 302 (1984).
- 6 Seiffert H.-J.: Werte zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel zweier Zahlen. *El. Math.* 42, 105–107 (1987).
- 7 Stolarsky K. B.: Generalizations of the logarithmic mean. *Math. Mag.* 48, 87–92 (1975).
- 8 Stolarsky K. B.: The power and generalized means. *Am. Math. Monthly* 87, 545–548 (1980).
- 9 Bemerkung zur kleinen Mitteilung von H. Alzer. *E. Math.* 41, 41 (1986).

© 1989 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/89/010016-03 \$1.50+0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 977.** Let  $p_m(x)$  denote the characteristic polynomial of the  $(m, m)$  top left submatrix of an  $(n + 1, n + 1)$  irreducible tridiagonal matrix  $A = (a_{ij})$ . Let  $p_{n+1}(x)$  have  $n + 1$  distinct real zeros  $\xi_0, \dots, \xi_n$ . Put

$$D_k := \begin{vmatrix} p_k(\xi_k) & p_k(\xi_{k+1}) & \dots & p_k(\xi_n) \\ p_{k+1}(\xi_k) & p_{k+1}(\xi_{k+1}) & \dots & p_{k+1}(\xi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n(\xi_k) & p_n(\xi_{k+1}) & \dots & p_n(\xi_n) \end{vmatrix}.$$

Prove  $D_k \neq 0$  ( $0 \leq k \leq n$ ).

Remark: The problem arose in a study of a fluid reservoir regulated by a general birth-death process.

E. A. van Doorn, A. A. Jagers, Enschede, NL

**Solution by the proposer.** Let  $N = n - k$ . Define  $p_0(x) = 1$ . Then the familiar recurrence relation

$$p_m(x) = (a_{mm} - x) p_{m-1}(x) - a_{m,m-1} a_{m-1,m} p_{m-2}(x) \tag{*}$$

is valid for all  $m$  with  $2 \leq m \leq n + 1$ . Hence, if two consecutive polynomials  $p_{m-1}(x)$  and  $p_m(x)$  have a zero  $t$  in common, then  $p_j(t) = 0$  for all  $j$ , since  $a_{s,s-1} a_{s-1,s} \neq 0$  by definition of irreducibility. However, this contradicts the definition of  $p_0(x)$ . It follows that  $p_{m-1}(x)$  and  $p_m(x)$  have distinct zeros. In particular, since  $p_n(\xi_n) = p_{n+1}(\xi_n)$  we must have