

Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 3

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Kleine Mitteilungen

Ein elementargeometrischer Beweis des Lotensatzes von Hjelslev

Bachmann hat die ebene metrische (absolute) Geometrie mit Hilfe von Bewegungsgruppen axiomatisch aufgebaut (s. [1] S. 32 ff.). In diesem Aufbau spielt die Konstruktion der vierten Büschelgerade d im Büschel a, b, c mit $a \cap b \cap c = \{S\}$ eine wichtige Rolle. Bezeichnet man die Spiegelung an der Geraden g mit S_g , so ist d die Gerade, für die $S_a S_b S_c = S_d$ gilt.

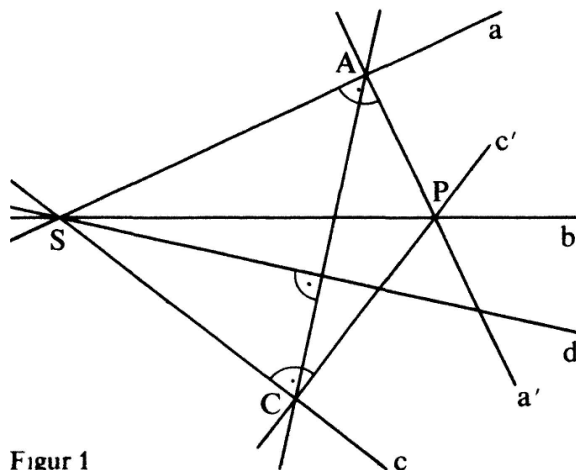
Diese vierte Büschelgerade läßt sich mit Hilfe des Lotensatzes konstruieren, den Hjelslev als den Fundamentalsatz der ebenen metrischen Geometrie bezeichnet hat (s. [1] S. 42). Im folgenden wird dieser Satz dadurch elementargeometrisch bewiesen, daß man die Konstruktion von d nach dem Lotensatz mit zwei anderen Konstruktionen von d in Beziehung setzt.

Lotensatz

Liegen a, b, c mit $a \cap b \cap c = \{S\}$ im Büschel, wobei $S_a S_b S_c = S_d$ ist, und ist a' Senkrechte auf a in $A \in a$, c' Senkrechte auf c in $C \in c$ und schneiden sich a' und c' in $P \in b$, so liegen a', b, c' genau dann im Büschel, wenn AC senkrecht zu d ist.

Konstruktion von d

Mit diesem Satz läßt sich d als das von S auf AC gefällte Lot konstruieren, wenn man in einem beliebigen Punkt $A \in a$, $A \neq S$ die Senkrechte a' auf a errichtet, im Schnittpunkt P von a' mit b das Lot c' auf c fällt und $C \in c$ der Fußpunkt dieses Lotes ist.



Figur 1

Andere Konstruktionen von d

1. Konstruktion

Es seien $a \cap b \cap c = \{S\}$, $\sphericalangle(a, b) = \alpha$ und d die Gerade durch S mit $\sphericalangle(c, d) = -\alpha$. Dann ist d die vierte Büschelgerade zu a, b, c für die gilt:

$$S_d = S_a S_b S_c.$$

Beweis:

$D_{S, 2\alpha}$ bedeute die Drehung um S mit Drehwinkel 2α . Aus

$$D_{S, 2\alpha} D_{S, -2\alpha} = Id \Leftrightarrow S_a S_b S_c S_d = Id$$

ergibt sich

$$S_a S_b S_c S_d S_d = S_d \Leftrightarrow S_a S_b S_c = S_d.$$

2. Konstruktion

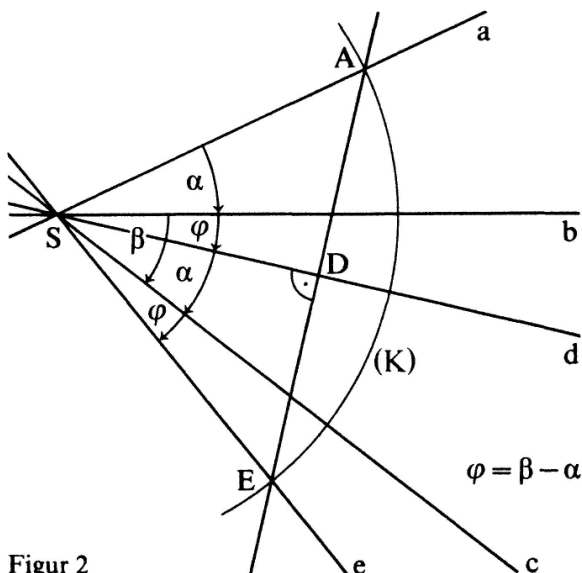
Es seien e die Gerade durch S mit $\sphericalangle(c, e) = \varphi = \beta - \alpha$, $\beta = \sphericalangle(b, c)$, $A \in a$ und $A \neq S$; der Kreis (K) um S mit $r = |SA|$ schneide e in E . Dann ist d die Winkelhalbierende von $\sphericalangle(ASE)$.

Konstruiert man also zunächst den Schnittpunkt E von (K) mit e (e ergibt sich mit Hilfe von $\sphericalangle(c, e) = \sphericalangle(b, c) - \sphericalangle(a, b)$), so erhält man d als das von S auf AE gefällte Lot.

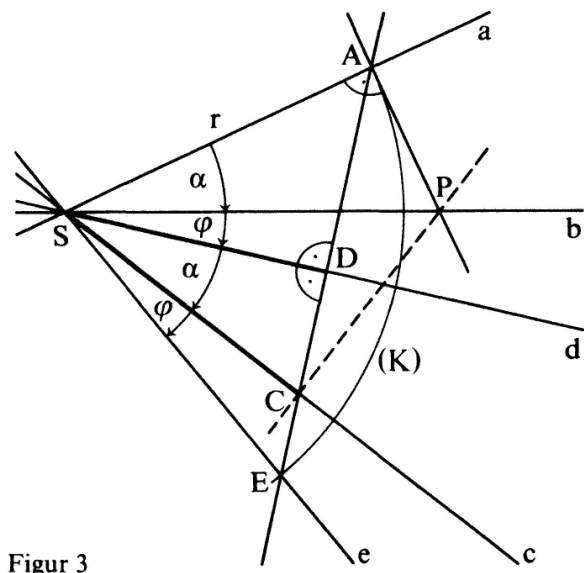
Zusammenhang mit dem Lotensatz

Man zeichnet in Figur 3 die in A auf a senkrecht stehende Gerade a' ein; ihr Schnittpunkt mit b sei P . Der Schnittpunkt von AE mit c heiße C , der Schnittpunkt von AE mit d sei D . Es sei $|SA| = r$.

Um den Lotensatz zu beweisen ist zu zeigen, dass CP senkrecht auf c steht.



Figur 2



Figur 3

Beweis:

In dem bei D rechtwinkligen Dreieck SDA ist $|SD| = r \cos(\alpha + \varphi)$; in dem bei D rechtwinkligen Dreieck SDC ist $|SC| = |SD| \cos \alpha$. Somit ist $|SC| = r \cos(\alpha + \varphi) \cos \alpha$.

In dem bei A rechtwinkligen Dreieck SPA ist $|SP| = |SA| \cos \alpha$. Die Projektion von $|SP|$ auf c ist $|SP| \cos(\alpha + \varphi)$; also ist diese Projektion $r \cos(\alpha + \varphi) \cos \alpha = |SC|$. Deshalb ist der Schnittpunkt C von AE mit c der Fußpunkt des von P auf c gefällten Lotes, somit steht PC senkrecht auf c .

Anmerkung: Weil $\angle(SCP) = 90^\circ$ ist, kann man C auch als Schnittpunkt des Thales-Kreises über $|SP|$ mit c konstruieren. Das Viereck $SCPA$ ist ein Sehnenviereck mit zwei gegenüberliegenden rechten Winkeln bei A und bei C .

Helmut Sieber, Böblingen

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Bachmann F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1974.

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/88/030086-03\$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 961. Für positive Zahlen x_1, x_2, x_3 sei

$$p_1 := (x_1 + x_2 + x_3)/3, \quad p_2 := (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)/3, \quad p_3 := x_1 x_2 x_3.$$

Dann gilt

$$p_3^2 + 5p_2^3 \geq 6p_1 p_2 p_3$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x_1 = x_2 = x_3$. Dies ist zu zeigen.

V. D. Mascioni, Origlio

Lösung: Setzt man

$$f(x_1, x_2, x_3) = p_3^2 + 5p_2^3 - 6p_1 p_2 p_3,$$

dann ist

$$f(tx_1, tx_2, tx_3) = t^6 f(x_1, x_2, x_3).$$

f ist also homogen in x_1, x_2, x_3 vom Grade 6 und man kann oBdA normieren:

$$x_1 x_2 = 1, \quad x_1 x_3 = 1 + a, \quad x_2 x_3 = 1 + b, \quad 0 \leq a \leq b.$$