

# Das Problem der drei Würfel in der Vorgeschichte der Stochastik

Autor(en): **Ineichen, R.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **42 (1987)**

Heft 3: **Archimedes was right. Part one**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40035>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Didaktik und Elementarmathematik

## Das Problem der drei Würfel in der Vorgeschichte der Stochastik

### 1. Einleitung

Die eigentlichen Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik werden meistens in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts angesiedelt, und «beginnen» lässt man sie dann in der Regel mit dem Briefwechsel zwischen *Blaise Pascal* und *Pierre de Fermat*. In diesem Briefwechsel spielt das Teilungsproblem (le problème des partis, le problème des points) eine zentrale Rolle [14]. Dieses Teilungsproblem tritt bereits in der Vorgeschichte der Stochastik an zahlreichen Stellen auf. O. Ore vermutet [17], es sei arabischen Ursprungs und weist darauf hin, dass es bereits in einem italienischen Manuskript von 1380 zu finden ist. Mit der Lösung dieser Aufgabe haben sich zunächst nacheinander *Fra Luca Pacioli* (1494), *Girolamo Cardano* (1539) und *Niccolò Tartaglia* (1556) beschäftigt. Ihre Lösungen sind falsch und tragen überdies dem *stochastischen* Charakter des Problems keine Rechnung. Der erste Mathematiker, der diesen stochastischen Aspekt in seine Betrachtungen einbringt, ist *Giobattista Francesco Peverone* (1558). Er gibt auch in einem Spezialfall bereits die richtige Lösung – in einem andern von ihm betrachteten Fall leider eine falsche [7]! Hundert Jahre später – im erwähnten Briefwechsel von 1654 – stellen dann *Pascal* und *Fermat* die richtige Betrachtungsweise dar.

### 2. Das Problem der drei Würfel

Es gibt nun aber ein anderes Problem, das in der Vorgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch immer wieder auftaucht, jedoch *viel früher* als das Teilungsproblem – nämlich in der zweiten Hälfte des 13. Jahrhunderts – richtig und unter Berücksichtigung des stochastischen Charakters gelöst worden ist. Es handelt sich um das Problem der drei Würfel, und es geht dabei um die Chancen, mit den drei Würfeln in einem Wurf eine bestimmte Punktzahl zu erzeugen.

Bereits die alten Griechen und Römer haben offenbar meistens mit drei Würfeln gespielt [1]: Gewinner war jener, der den «schönsten Wurf», nämlich drei Sechser, erzielte; gelegentlich haben sie auch die drei Augenzahlen vorherzusagen versucht, die ihre drei Würfel im kommenden Wurf zeigen werden. «Drei Sechser oder drei Einer» ist aus dieser Zeit als Sprichwort bekannt: die griechische Version unseres «Alles oder nichts!». Von diesen und andern Zufallsexperimenten sind uns aber keine Überlegungen überliefert, die irgendwelche wahrscheinlichkeitstheoretische Ansätze zeigen. In [7] sind wir den Gründen etwas nachgegangen.

Im Mittelalter hingegen ist das Spiel mit den drei Würfeln vor allem als «*gioco della zara*» stark verbreitet gewesen, ganz besonders in Italien. Dieses zara-Spiel ist also mit drei Würfeln gespielt worden und bestand darin, die *Summe* der Punkte, die die drei Würfel zeigen werden, vorauszusagen. Die Summen 3 und 4 und ebenso 17 und 18 sind dabei nicht berücksichtigt worden, weil sie selten auftreten; aus demselben

Grunde haben oft sogar nur die Summen von 7 bis 14 Geltung gehabt. – Im Zusammenhang mit diesem Spiel sind nun Überlegungen gemacht worden, die *erste bescheidene Ansätze zur Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeit* zeigen und zwar wesentlich *früher* als beim Teilungsproblem.

### 3. Wenn auseinandergehn die Würfelspieler...

Mit diesen Worten beginnt *Dante* den sechsten Gesang des Purgatorio in seiner *Divina Commedia* [1\*]. Die farbig geschilderte, wohl alltägliche Szene, die *Dante* hier beschreibt, ist für uns nun deshalb von Interesse, weil bereits unter den frühesten Kommentaren solche zu finden sind, die nicht nur den *gioco della zara* eingehend erklären, sondern sich auch bereits in ganz einfacher Weise in der *Berechnung von Chancen* versuchen.

*G. Libri* hat 1838 – wohl als erster – auf einen solchen Kommentar hingewiesen und Teile davon in sein Buch [13] aufgenommen. Da er den Verfasser nicht mit Bestimmtheit nennen kann, jedoch darauf hinweist, der Kommentar sei 1477 in Venedig publiziert worden, wird in späteren Darstellungen in der Regel einfach von einem Kommentar aus dem Jahre 1477 gesprochen [2\*]. Dies ist indessen sehr irreführend. Wir haben das Zitat von *Libri* mit den frühen *Dante*-Kommentaren verglichen, die ja nun alle in guten Editionen zur Verfügung stehen: Es zeigt sich eindeutig, dass das Zitat von *Jacopo di Giovanni della Lana* [12] stammen muss, und dessen Kommentar ist bereits zwischen 1324 und 1328 (!) entstanden [3\*]. *Della Lana* sagt zunächst ganz klar, dass die Summen, die zwischen 4 und 17 liegen, auf mehr Arten realisiert werden können, als 3, 4, 17 und 18. Die Summe, die auf die meisten Arten realisiert werden kann, bezeichnet er als «beste Summe» (*miglior volta*). Er meint weiter – und welcher Spieler hätte diese Erfahrung nicht schon gemacht? –, dass oftmals auch gerade jene Summe kommen kann, die eigentlich weniger oft kommen sollte: «*ma molto fiata viene piuttosto quella che in meno volte può venire!*»

Weiter stellt *della Lana* in seinem Kommentar, der übrigens der erste vollständige Kommentar zur *Divina Commedia* ist, fest, dass 3 und ebenso 18 nur auf eine Art realisiert werden kann: «*non può venire, se non in uno modo, cioè quando ciascuno dado viene in asso*»; also  $3 = 1 + 1 + 1$ . Allerdings fährt er nun weiter, dass dasselbe auch für 4 (und ebenso für 17) gelte: «*quattro non può venire in tre dadi se non in uno modo, cioè per l'uno dado in due, e due dadi in asso*»; also  $4 = 2 + 1 + 1$ . Wir würden hier natürlich noch die Permutationsmöglichkeiten berücksichtigen und sagen, dass 4 und ebenso 17 auf je drei Arten realisiert werden können. Ein Versehen oder ein noch ungenügend entwickeltes Verständnis für gleichmögliche, also für gleichwahrscheinliche Fälle?

Dazu ist zunächst zu sagen, dass oft gar *nicht so selbstverständlich* ist, welche Fälle als *gleichwahrscheinlich* zu betrachten sind. Darauf hat zum Beispiel *Henri Poincaré* in «*Science et Hypothèse*» sehr deutlich hingewiesen. Und aus der Quantentheorie ist bekannt, dass oft erst die Erfahrung, das Experiment, zeigt, welche Fälle im mathematischen Modell als gleichmöglich zu betrachten sind. Schliesslich dürfen wir *della Lana* einen postumen Trost nicht versagen: Knapp 400 Jahre später schreibt *G. W.*

*Leibniz* – der sich ja auch eingehend mit kombinatorischen Problemen auseinandergesetzt hat – in einem Brief (an *Bourguet*, 22. März 1714, [11]) – unter anderem: «... par exemple avec deux dés il est aussi faisable de jeter douze points que d'en jeter onze, car l'un et l'autre ne se peut faire que d'une seule manière...». Wir würden doch sagen:  $12 = 6 + 6$ , aber  $11 = 6 + 5 = 5 + 6$ . Leibniz begeht also denselben Fehler wie unser Dante-Kommentator aus dem Anfang des 14. Jahrhunderts!

#### 4. Von der Nutzlosigkeit des Würfelspiels

Aus demselben Zeitraum besitzen wir nun aber ein Werk, in welchem das Problem der drei Würfel ganz nach unserer heutigen Auffassung gelöst wird, übrigens in aller Ausführlichkeit und mit allen notwendigen Begründungen. Es handelt sich um die zwischen 1250 und 1300 entstandene lateinische Dichtung *De Vetula*, eine Lebensbeschreibung *Ovids*, die *Ovid* selbst in den Mund gelegt wird. (Man spricht deshalb vom *Pseudo-Ovidius De Vetula*.) Dieses 2400 Hexameter umfassende Werk, «dem zwischen dem 13. und 15. Jahrhundert eine ausserordentliche Verbreitung zukam» (P. Klopsch in [10]), prangert unter anderem die Verderbtheit und die Nutzlosigkeit des Würfelspiels an (Verse 358–576 in [10]). Wir wollen uns einige Stellen aus dem von P. Klopsch herausgegebenem Text näher ansehen [4\*]:

In den Versen 410–415 wird vom Wurf mit drei Würfeln gesagt: «Sie können auf verschiedene Weisen variieren und 16 Summen erzeugen: 3, 4, ..., 17, 18. Aber diese Summen sind nicht vom gleichen Gewicht (*non tamen eque virtutis*). Die grossen und die kleinen Summen treten selten auf und die dazwischen häufig. Diese kommen um so häufiger vor, je mehr sie sich den mittleren annähern.»

Anschliessend werden aus den Ziffern 1, 2, ..., 6 alle  $\binom{8}{3} = 56$  Kombinationen mit

Wiederholung – hier *puncturae* genannt – korrekt gebildet und auch begründet. Zum Beispiel (V. 430–440): «Aber, wenn eine Ziffer verschieden von den andern ist und zwei Ziffern gleich sind, so ergeben sich 30 *puncturae*: Wenn du irgendeine der sechs Ziffern verdoppelst und eine beliebige der übrigen hinzufügst, so erzeugst du 30, nämlich sechsmal fünf. Wenn aber alle Ziffern verschieden sind, so zählst du 20 *puncturae*: 4 Fälle, in denen nur aufeinanderfolgende Ziffern auftreten und ebenso viele Fälle, wenn keine aufeinanderfolgende auftreten. Wenn aber zwei aufeinanderfolgende auftreten und die dritte nicht, so findest du zweimal drei und dreimal zwei.»

Und dann wird klar herausgearbeitet, dass gewisse dieser Auswahlen von drei Ziffern mehrfach auftreten können, so etwa (V. 449–452): «Wenn aber alle drei Ziffern verschieden sind, so findest du sechs Anordnungen (*scemata*): Hast du nämlich einen Platz zugeteilt, so permutieren die andern zwei ihre Plätze...» (*reliqui duo permutant loca*).

Am Ende dieser Betrachtungen folgt eine vollständige Tabelle der auftretenden Summen, also der *puncturae* (der Kombinationen mit Wiederholungen) und der jedesmal zugehörigen Anzahl der Permutationen, der «*cadentiae*», mit welcher diese Summen auftreten:

3	18	punctatura	1	cadentia	1
4	17	punctatura	1	cadentiae	3
5	16	punctaturae	2	cadentiae	6
6	15	punctaturae	3	cadentiae	10
7	14	punctaturae	4	cadentiae	15
8	13	punctaturae	5	cadentiae	21
9	12	punctaturae	6	cadentiae	25
10	11	punctaturae	6	cadentiae	27.

Nach Auflistung dieser 216 «cadendi scemata» kennt nun der Leser die «*Stärken*» und die «*Schwächen*» der einzelnen Summen vollständig. Jetzt kann der (übrigens unbekannte) Autor diesen Teil seiner Ausführungen abschliessen mit (V. 458–459)

«plene cognosces, quante virtutis eorum  
quilibet esse potest seu quante debilitatis».

Hier liegt also – erstmals? – für ein nichttriviales Problem eine *vollständige* Liste *gleichwahrscheinlicher Ereignisse* vor. In den «cadentiae» ist uns die Zahl der günstigen Fälle gegeben, und die Chancen können natürlich auch beurteilt werden, ohne dass aus dieser Zahl und der Zahl der gleichmöglichen Fälle der Quotient gebildet wird.

## 5. Girolamo Cardano

Auf den Renaissance-Gelehrten *Girolamo Cardano* geht das erste eigentliche Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung zurück, der *Liber de Ludo alee*, geschrieben 1526. Das Buch ist aber kaum von nachhaltiger Wirkung geworden: Es ist erst beim Tode Cardanos im Jahre 1576 entdeckt worden und sogar erst im Jahre 1663 im Rahmen der Gesamtausgabe von *Cardanos* Werken gedruckt worden. In diesem lateinisch geschriebenen und nicht leicht zu lesenden Buch [5\*] wird unter anderm auch das Problem von den drei Würfeln wieder aufgenommen und richtig gelöst, anschliessend an das analoge Problem mit zwei Würfeln. Es ist sehr bemerkenswert, dass dabei oft auch der *Quotient* aus der Zahl der günstigen und der Zahl der gleichmöglichen Fälle gebildet wird, dass *Cardano* also jenen Wahrscheinlichkeitsbegriff verwendet, den man heute oft als den «*klassischen*» oder den «*Laplaceschen*» (!) bezeichnet. So schreibt er zum Beispiel bei der Behandlung des Ausspielens von zwei Würfeln über das Auftreten der Summe 10: «Die Summe besteht aus (5, 5) und (6, 4), aber letzteres kann auf zwei Arten entstehen, so dass die Gesamtzahl der Wege, die zehn ergeben,  $1/12$  der gesamten Möglichkeiten ist» [6\*]. In diesem Zusammenhang muss auch noch erwähnt werden, dass *Cardano* in seinem Buch ausdrücklich den Begriff des guten Würfels (*alea iusta*) erwähnt und damit die gleichmöglichen Fälle idealisiert.

## 6. Galileo Galilei

In der kurzen Abhandlung *Sopra le scoperte de i dadi* [5], deren Entstehungszeit nicht genau datiert werden kann, beschäftigt sich auch *Galileo Galilei* (1564–1644) mit dem

Problem der drei Würfel; völlig richtig und für den Leser völlig klar. Liest man diese Arbeit, so fällt einem der Satz auf: «... si vede non di meno che la *lunga osservazione* ha fatto i giocatori stimarsi più vantaggiosi il 10 e l'11 che '1 9 e '1 12.» Haben einsichtige Spieler diesen kleinen Unterschied in den Wahrscheinlichkeiten des Ereignisses «10 oder 11» und des Ereignisses «9 oder 12» in «langer Beobachtung» wirklich feststellen können?

Bezeichnen wir das erstgenannte Ereignis mit  $A$  und das zweite mit  $B$ , so ist also

$$P(A) - P(B) = \frac{54}{216} - \frac{50}{216} = \frac{2}{108} \approx 0,02. \quad \text{— Ein wahrhaft sehr kleiner Unterschied!}$$

Konnte er experimentell erkannt werden? — Etwas plausibler wird die Sache, wenn wir die bedingten Wahrscheinlichkeiten heranziehen und somit von der Voraussetzung ausgehen, die Spieler hätten sich bei diesen Überlegungen auf die Beobachtung der am häufigsten auftretenden Ergebnisse 9, 10, 11 und 12 beschränkt:

$$P(A|A \cup B) - P(B|A \cup B) = \frac{2}{52} \approx 0,04.$$

Hier liegt ein Unterschied vor, der vielleicht eher feststellbar sein dürfte — bei wirklich *guten* Würfeln!

## 7. Ausblicke

1657 publiziert *Christian Huygens* (1629–1695) eine kleine, streng systematische Abhandlung über Glücksspiele, *De ratiociniis in aleae ludo*, als Anhang zu den *Exercitationes mathematicae* von *Frans van Schooten*. In dieser Arbeit von *Huygens* wird das Problem der drei Würfel ebenfalls wieder dargestellt und — selbstverständlich — richtig gelöst. Einen ganz wesentlichen Fortschritt zeigt dann die Darstellung von *Jakob Bernoulli* (1654–1705). In seiner *Ars conjectandi* (postum erschienen 1713, [2], [3]) ist ja bekanntlich im ersten Teil die *Huygenssche* Abhandlung neu abgedruckt, jedoch mit zahlreichen Anmerkungen von *Jakob Bernoulli* selbst versehen. In seinen *Annotationes* zu unserem Problem verallgemeinert er nun zuerst die Betrachtungen für vier, fünf und mehr Würfel. Er stellt dann fest, dass diese Methode überaus langweilig und zeitraubend — «*supra modum taediosa at prolixa*» — sei und beschreibt deshalb Aufbau und Konstruktion einer Tafel, der man die gesuchten Resultate entnehmen kann. Wir geben daraus einen Ausschnitt wieder:

Die ersten drei Zeilen geben also die möglichen Augensummen bei ein, zwei oder drei Würfeln. Die entsprechend bezeichneten Zeilen im zweiten Teil der Tabelle zeigen uns die Anzahl der Bildungsarten dieser Summen, also die jeweilige Zahl der günstigsten Fälle. Die restlichen Zeilen werden zusätzlich für die Rechnung benötigt. Man bemerkt nun leicht, dass bei diesem Verfahren von *Jakob Bernoulli* im Grunde

genommen einfach die Koeffizienten von  $\left(\sum_{i=1}^6 u^i\right)^k$  für  $k = 1, 2, 3$  systematisch gebildet werden. Dieses Polynom in  $u$  erhält man aber sofort aus der «*erzeugenden Funk-*

I	1	2	3	4	5	6												
II	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12							
III	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18		
I	1	1	1	1	1	1												
		1	1	1	1	1	1											
			1	1	1	1	1	1										
				1	1	1	1	1	1									
					1	1	1	1	1	1								
						1	1	1	1	1	1							
							1	1	1	1	1	1						
II	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1							
		1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1						
			1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1					
				1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				
					1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1			
						1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1		
III	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1		

tion»  $f$ , die hier durch  $f(u) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 u^i$  gegeben ist. Sie stellt das Problem zunächst

für einen Würfel dar: Der Exponent von  $u$  gibt die Anzahl Punkte einer Würfelseite, der Koeffizient von  $u^i$  – hier konstant  $1/6$  – liefert die zugehörige Wahrscheinlichkeit der Seite. Berechnet man jetzt die zweite, dritte, ... Potenz von  $f(u)$ , so zeigt das Ergebnis die gesuchten Resultate: Die Exponenten von  $u$  liefern die Summen der Augen, der zugehörige Koeffizient gibt die Wahrscheinlichkeit dieser Summe.

Der Name «erzeugende Funktion» geht auf *P. S. de Laplace* (1749–1827) zurück. So nannte er jene Funktionen, die hinter den Potenzreihen stehen, die *Leonhard Euler* bei der Behandlung von Abzählproblemen von *Partitionen* erstmals verwendet hat (1741) [7\*]. Unser Würfelproblem führt nun tatsächlich auf einfache Aufgaben über Partitionen: Soll etwa untersucht werden, wie oft beim Wurf von 3 Würfeln die Augensumme 9 gebildet werden kann, so heisst das doch, dass die Anzahl der additiven Zerlegungen (mit Berücksichtigung der Reihenfolge) von 9 in drei Summanden aus der Referenzmenge  $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  gesucht ist. Dies sind gerade jene Partitionen von 9 (mit Berücksichtigung der Reihenfolge), die aus drei Summanden bestehen, welche aus  $R$  ausgewählt sind [8\*].

R. Ineichen, Math. Institut, Universität Fribourg

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 L. Becq de Fouquières: Les jeux des anciens. Paris 1873.
- 2 J. Bernoulli: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 107 und 108.
- 3 J. Bernoulli: Die Werke von Jakob Bernoulli. Hrg. von der Naturforsch.Ges. in Basel; Band 3, bearbeitet von B. L. van der Waerden, Basel 1975.
- 4 F. N. David: Games, Gods and Gambling. London 1962.
- 5 Galileo Galilei: Opere. A c. di S. Timpanaro, I. Milano 1936.

- 6 K. G. Hagstroem: Les préludes antiques de la théorie des probabilités. Stockholm 1932.
- 7 R. Ineichen: «Die Wahrscheinlichkeit ist nämlich ein Grad der Gewissheit...». Rückblicke auf die Vorgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: Bull. Soc. Frib. Sc. Nat., Vol. 75, Fasc. 1/2 (1986).
- 8 M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik, Bände 1 u. 2. Stuttgart 1973 und 1976.
- 9 M. G. Kendall: Studies of the History of Probability and Statistics II. – The Beginnings of a Probability Calculus. In: Biometrika 43 (1956).
- 10 P. Klopsch: Pseudo – Ovidius De Vetula. Untersuchungen und Text. Leiden 1967.
- 11 K. Kohli: Aus dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Jakob Bernoulli. In: [3].
- 12 della Lana: Comedia di Dante degli Allagherii col commento di Jacopo di Giovanni della Lana. A c. di L. Scarabelli. Milano 1865.
- 13 G. Libri: Histoire des Sciences mathématiques en Italie, Bd. II. Paris 1838/41.
- 14 H. Loeffel: Glückspiel und Markovketten. In: El. Math. 29 (1974).
- 15 L. E. Maistrov: Probability Theory, a historical Sketch (translated by S. Kotz from the Russian). New York 1974.
- 16 O. Ore: Cardano, the gambling scholar. Princeton 1953.
- 17 O. Ore: Pascal and the invention of probability theory. In: Am. Math. Monthly 67 (1960).

## ANMERKUNGEN

- [1\*] Quando si parte il gioco della zara/ colui che perde si riman dolente,/ riptendo le volte, e tristo impara;/ con l'altro se ne va tutta la gente...
- [2\*] So von I. Todhunter (1865), M. Cantor (1899), M. G. Kendall (1956) in [9], F. N. David (1962) in [4].
- [3\*] Er ist indessen tatsächlich erst 1477 in Venedig publiziert worden. K. G. Hagstroem [6] und L. E. Maistrov [15] schreiben ihn übrigens *Benvenutus de Ramboldis de Imola* zu. Liest man aber die entsprechenden Stellen im Kommentar von *Benvenutus*, so stellt man fest, dass gerade er jede Interpretation des zara-Spiels zurückweist, denn – so schreibt er – «nulla pestis est perniciosior» als eben dieses Spiel. – Ich möchte an dieser Stelle Frau M. T. Bise-Casella sehr danken für ihre Mithilfe bei der Beschaffung und Durchsicht der Kommentare und für ihre Unterstützung bei den hier und andern Stellen auszuführenden Übersetzungen.
- [4\*] Es scheint keine Übersetzung des Textes in die deutsche oder französische Sprache zu geben; die zitierten Stellen sind deshalb frei aus dem Lateinischen übertragen. – Die französische Dichtung «*La Vieille ou les dernières amours d'Ovide*» von Jean Lefevre (14. Jh.) kann nicht als Übersetzung angesprochen werden: Der Autor entfernt sich oft sehr stark von der Vorlage, indem er kürzt oder anderes unverhältnismässig ausweitet. Für die uns hier interessierenden Verse findet man darin keine Hilfe.
- [5\*] Es ist von O. Ore analysiert und kommentiert worden und zusammen mit einer von S. H. Gould erarbeiteten englischen Übersetzung des gesamten Textes herausgegeben worden, [16].
- [6\*] «Decem autem ex bis quinque, et sex, et quatuor, hoc autem variatur dupliciter, erit igitur duodecima pars circuitus...»
- [7\*] Seit H. Rademacher gibt es eine befriedigende algebraische Theorie dieser Potenzreihen, die Theorie der formalen Potenzreihen. Unsere oben erwähnten Polynome stellen eigentlich solche formalen Potenzreihen in der Unbestimmten  $u$  dar, allerdings mit nur endlich vielen von 0 verschiedenen Gliedern. Man vergleiche dazu [8], vor allem Band 2.
- [8\*] Man vergleiche dazu [8], Band 1.