

On a diophantine equation $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = (z^2 - 1)^2$

Autor(en): **Hirose, Shoichi**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **42 (1987)**

Heft 1

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40025>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On a diophantine equation $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = (z^2 - 1)^2$

1. Schinzel and Sierpiński [4] gave the complete solution of the equation

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = \left(\left(\frac{y-x}{2} \right)^2 - 1 \right)^2 \quad (1)$$

in positive integers $x, y, x < y$. Equation (1) is a special case of the equation

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = (z^2 - 1)^2. \quad (2)$$

The only known solution of (2) which is not a solution of (1) is $(x, y, z) = (4, 31, 11)$ found by Szymiczek [5].

In this paper we give a method for finding positive integer solutions x, y, z of (2), and show two new solutions.

2. Let $1 < x < y, x^2 - 1 = D v^2, y^2 - 1 = D' v'^2$, where D and D' have no square factors. Then we get $D = D'$, because

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = D D' (v v')^2 = (z^2 - 1)^2.$$

If (u_1, v_1) is the minimal positive solution of the equation

$$u^2 - D v^2 = 1,$$

then all positive solutions are given by (u_k, v_k) for $k = 1, 2, 3, \dots$ where u_k and v_k are the integers defined by

$$u_k + v_k \sqrt{D} = (u_1 + v_1 \sqrt{D})^k. \quad (3)$$

Since we can put $x = u_i, v = v_i, y = u_j, v' = v_j, i < j$, we have

$$D v_i v_j + 1 = z^2. \quad (4)$$

From (3), it follows that

$$u_{k+1} = u_1 u_k + D v_1 v_k,$$

$$v_{k+1} = u_1 v_k + v_1 u_k.$$

Hence, by mathematical induction, $u_k = f_k(u_1)$ is a polynomial of degree k in u_1 , and $v_k/v_1 = g_k(u_1)$ is a polynomial of degree $k-1$ in u_1 . Indeed,

$$g_k(u_1) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} (-1)^n \binom{k-n-1}{n} (2u_1)^{k-2n-1}.$$

Thus, the left side of (4)

$$\begin{aligned} D v_i v_j + 1 &= D v_1 g_i(u_1) \cdot v_1 g_j(u_1) + 1 \\ &= (u_1^2 - 1) g_i(u_1) g_j(u_1) + 1 = F_{ij}(u_1) \end{aligned}$$

is a polynomial of degree $i+j$ in u_1 . If there is a solution (u_1, z) , $u_1 > 1$ of the equation

$$F_{ij}(u_1) = z^2,$$

then $(x, y, z) = (u_i, u_j, z)$ is a solution of (2).

(i) $i=1, j=2$. Since $v_2 = 2u_1 v_1$, we get $g_2(u_1) = 2u_1$, and so $F_{12}(u_1) = (u_1^2 - 1) \cdot 2u_1 + 1 = 2u_1^3 - 2u_1 + 1$. $F_{12}(u_1) = z^2$ has the following three solutions (u_1, z) , $1 < u_1 < 10^5$:

$$(u_1, z) = (3, 7), (4, 11), (155, 2729).$$

Therefore, we obtain the following three solutions of (2), the first of which is a solution of (1), and the last of which is new.

$$(x, y, z) = (3, 17, 7), (4, 31, 11), (155, 48049, 2729).$$

(ii) $i=1, j=4$. Since $v_4 = v_1(8u_1^3 - 4u_1)$, we get

$$F_{14}(u_1) = (u_1^2 - 1)(8u_1^3 - 4u_1) + 1 = 8u_1^5 - 12u_1^3 + 4u_1 + 1.$$

$F_{14}(u_1) = z^2$ has the following solution (u_1, z) , $1 < u_1 < 10^3$:

$$(u_1, z) = (2, 13).$$

Therefore, we obtain the following new solution of (2), where x is even, y and z are odd:

$$(x, y, z) = (2, 97, 13).$$

(iii) In the case of $3 \leq i+j \leq 9$, except above, we get only the following three solutions, all of which are solutions of (1).

i	j		u_1	x	y	z
2	3	$1 < u_1 < 10^3$	3	17	99	41
3	4	$1 < u_1 < 10^2$	3	99	577	239
4	5	$1 < u_1 < 35$	3	577	3363	1393

The equation (2) has no solutions other than above for all integers x and y , where $1 < x < y < 10^3$.

Though we cannot solve (2) completely, we conjecture that there are only three solutions of (2) which are not solutions of (1).

3. We applied our method to the equation

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = (z^2 + 1)^2,$$

but we could not obtain other solutions than those Williams [6] found.

Our method cannot be applied to the equation

$$(x^2 - e)(y^2 - e) = (z^2 - e)^2$$

where $e \neq \pm 1, \pm 4$. However, our method may be applied to the equation

$$(x^2 - e)(y^2 - e) = \{h(z)\}^2$$

where $e = \pm 1, \pm 4$ and $h(z)$ is a linear or quadratic expression in z .

For example, the equations

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = (z^2 + t^2)^2,$$

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = (z^2 - t^2)^2$$

have always integer solutions for all integers t , given by

$$(x, y, z) = (t, 4t^3 + 3t, 2t^2 + 1)$$

$$(x, y, z) = (2t^2 \pm 1, 8t^4 \pm 8t^2 + 1, 4t^3 \pm 3t),$$

respectively.

Shoichi Hirose, Mita High School, Tokyo, Japan

REFERENCES

- 1 R. K. Guy: *Unsolved problems in number theory*. New York: Springer-Verlag, 1981, 105.
- 2 J. A. H. Hunter: *Problem 5020*. *Amer. Math. Monthly* 69, 316–317 (1962).
- 3 R. V. Iyer: *Solution 5020*. *Amer. Math. Monthly* 70, 574 (1963).
- 4 A. Schinzel and W. Sierpiński: *Sur l'équation diophantienne $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = [((y - x)/2)^2 - 1]^2$* . *El. Math.* 18, 132–133 (1963).
- 5 K. Szymiczek: *On a diophantine equation*. *El. Math.* 22, 37–38 (1967).
- 6 H. C. Williams: *Note on a diophantine equation*. *El. Math.* 25, 123–125 (1970).