Aufgaben

Objekttyp: **Group**

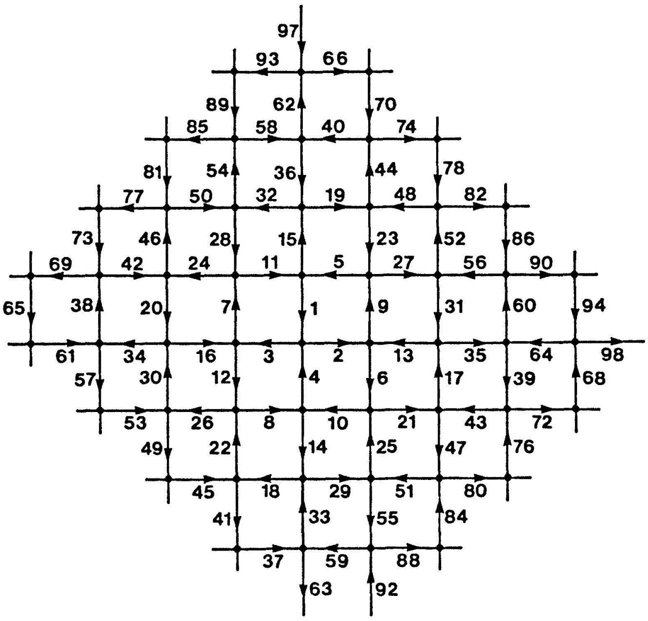
Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **41 (1986)**

Heft 3

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Satz 8. *Es sei B ein kubischer Baum mit n Kanten. Wenn* $n \equiv 9 \pmod{12}$ *ist und jeder Längstweg in B gerade Länge hat, dann ist B nicht rigoros.*



Figur 5

Vermutung 6. *Alle anderen kubischen Bäume sind rigoros.*
Auch für nicht zusammenhängende oder unendliche Graphen ist die Frage nach ihrer Rigorosität interessant. Das zweidimensionale Gitter ist nach Figur 5 rigoros. Das Bildungsgesetz kann man leicht erkennen, wenn man, vier Buntstifte benutzend, die Kanten mit den Nummern $\equiv i \pmod 4$ mit dem i-ten Buntstift nachzieht ($i = 1, 2, 3, 4$).

G. Ringel, Santa Cruz, USA

LITERATURVERZEICHNIS

1 E. Lucas: Les rondes enfantines, in: Récréations Mathématiques, Band 2, 2. Aufl. Paris 1894.
2 B. Jackson und G. Ringel: Solution of Headwood's empire problem in the plane. J. reine angew. Math. *347,* 146–153 (1984).
3 G. Ringel: Map Color Theorem. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1974.
4 G. Ringel: Über drei kombinatorische Probleme am n-dimensionalen Würfel und Würfelgitter. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *20,* 10–19 (1955).

 0013-6018/86/060068-07$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 923. Für die Umfänge der Dreiecke mit den Seiten $(y+z)/(1+yz)$, $(z+x)/(1+zx)$ und $(x+y)/(1+xy)$, wobei $x = \tan(A/4)$, $y = \tan(B/4)$, $z = \tan(C/4)$ und $A + B + C = \pi$ (vgl. Aufgabe 907, El. Math. *40* (1985)), sind bestmögliche untere und obere Schranken gesucht.

Hj. Stocker, Wädenswil

Lösung. Wir zeigen allgemeiner: Sind A, B, C die Winkel eines Dreiecks und

$$S(\lambda) := \sum (\tan\lambda B + \tan\lambda C)/(1 + \tan\lambda B \tan\lambda C); \quad 0 < \lambda < 1/2$$

(Summation zyklisch bez. A, B, C), so gilt

$$3\sin(2\lambda\pi/3) \leqslant S(\lambda) < 2\tan\lambda\pi.$$

Beweis. a) Es ist

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= \sum \sin(\lambda(B + C))/\cos(\lambda(B - C)) \geqslant \sum \sin(\lambda(B + C)) \\ &= \sum \sin(\lambda\pi - \lambda A). \end{aligned}$$

Wegen der Konkavität von sin in $[0, 2\pi]$ ergibt sich

$$S(\lambda) \geqslant 3\sin(\lambda\pi - \lambda(A + B + C)/3) = 3\sin(2\lambda\pi/3).$$

b) Aus

$$S(\lambda) < \sum (\tan\lambda B + \tan\lambda C) = 2\sum \tan\lambda A,$$

der Konvexität von tan in $[0, \pi/2]$ und [1], p. 22, Theorem 1 folgt

$$S(\lambda) < 2(\tan\pi\lambda + 2\tan 0) = 2\tan\lambda\pi.$$

Die in der Aufgabenstellung verlangte Abschätzung lautet somit

$$3/2 \leqslant S(1/4) < 2.$$

W. Janous, Innsbruck, A.

LITERATURVERZEICHNIS

1 D. S. Mitrinović, Analytic Inequalities, Berlin 1970.

Weitere Lösungen sandten S. Arslanagić (Trebinje, YU), C. Bindschedler (Küsnacht), L. Kuipers (Sierre), M. Vowe (Therwil).

Aufgabe 924. Für $n \in \mathrm{N}$ bezeichne $\alpha(n)$ den grössten Teiler von n mit $\alpha(n) \not\equiv 0 \pmod 3$. Man zeige, dass

$$\sum_{n \leqslant x} \alpha(n) n^{-1} = \frac{3}{4} x + 0(1), \tag{1}$$

$$\sum_{n \leqslant x} \alpha(n) = \frac{3}{8} x^2 + 0(x). \tag{2}$$

L. Kuipers, Sierre

Solution: Let p be a prime and let $\alpha(n)$ denote the largest divisor of n with $\alpha(n) \not\equiv 0 (\bmod p)$. For $x \in \mathbf{Z}, x \geqslant 0$, put

$$f(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \alpha(n) n^{-1} \quad \text{and} \quad g(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \alpha(n).$$

Then

$$\frac{p}{p+1} x \leqslant f(x) < \frac{p}{p+1}(x+1)$$

and

$$\frac{p}{2(p+1)} x^2 \leqslant g(x) < \frac{p}{2(p+1)}(x+1)^2.$$

Proof: If p^k is the largest power of p dividing n, then $\alpha(n) = n/p^k$. Hence, if $x \equiv r (\bmod p)$ with $0 \leqslant r < p$, then

$$f(x) = \frac{p-1}{p}(x-r) + r + \frac{1}{p} f\left(\frac{x-r}{p}\right)$$

and

$$g(x) = \frac{p-1}{2p}(x-r)^2 + \frac{1}{2} r(2x - r + 1) + g\left(\frac{x-r}{p}\right),$$

since e.g. $1 + 2 + \cdots + mp - (p + 2p + \cdots + mp) = (p-1)(mp)^2/2p$.

Repeated use of these recurrence relations for a fixed extremal value of r ($r = 0$ or $r = p - 1$) suggest the given lower and upper bounds for $f(x)$ and $g(x)$. The actual proof, by induction on x, using the recurrence relations, is easy; only the induction step in the proof of $g(x) < p(x+1)^2/2(p+1)$ requires some care: Assume $x \geqslant p$. By the induction hypothesis $2(p+1)g(x) < (p^2 - 1)p^{-1}(x-r)^2 + (p+1)r(2x - r + 1) + p^{-1}(x - r + p)^2 = px^2 + (p + r + 1)x + r + 1 - (p - r - 1)(x - r - 1) \leqslant p(x+1)^2$, since $x \geqslant p \geqslant r + 1$.

Remark: The upper bounds for $f(x)$ and $g(x)$ coincide with the lower bounds for $f(x+1)$ and $g(x+1)$.

A. A. Jagers, Enschede, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Cseh (Cluj, R), W. Janous (Innsbruck, A), H.-J. Kanold (Braunschweig, BRD), Kee-wai Lau (Hongkong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr. A. Meyer (Bern).

Aufgabe 925. Man zeige, dass für $n \geqslant 2$

$$\frac{n\log n}{n-1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \log n + n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot$$

P. Ivády, Budapest, Ungarn

Lösung mit Verschärfung: Bekanntlich gilt für natürliche n

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n - C < \frac{1}{2n}, \tag{1}$$

wobei C die Eulersche Konstante mit dem Zahlenwert 0.577215664... ist (siehe [1], S. 197).
Es gilt folglich für $n \geqslant 2$

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \log n + 0.5772156 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \frac{1}{2n} + \log n + 0.5772157. \tag{2}$$

Für $n = 2$ stellt diese Ungleichung keine, für $n \geqslant 3$ jedoch eine wesentliche Verschärfung der zu beweisenden Ungleichung dar. Denn führt man die Hilfsfunktion

$$h(n) = \frac{\log n}{n-1}$$

ein, so folgt wegen $h'(n) < 0$ für $n \geqslant 3$ und $h(3) < 0.5772156$ sofort

$$\frac{n\log n}{n-1} - \log n = h(n) < 0.5772156 < \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + 0.5772156 \quad \text{für} \quad n \geqslant 3; \tag{3}$$

andererseits ist

$$\frac{1}{2n} + 0.5772157 < n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{4}$$

richtig für $n = 3$, also, weil die Folge $n \to \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bekanntlich monoton steigend ist, auch für alle $n \geqslant 3$.

LITERATURVERZEICHNIS

1 G. Pólya und G. Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I. Berlin 1970.

J. Rédei, Bremen, BRD

Weitere Lösungen sandten S. Arslanagić und D. Milosević (Trebinje, YU und Pranjani, YU), K. Bickel (Nürtingen, BRD), E. Braune (Linz, A), P. Bundschuh (Köln, BRD), A.A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hongkong), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), N. Mihajlovska (Pranjani, YU), V.D. Mascioni (Origlio), I. Merenyi (Cluj, R), H.-J. Seiffert (Berlin-West), N. Sivakumar (Edmonton, CA), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Dezember 1986* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68), Problem 872A (Band 36, S. 175), Aufgabe 880 (Band 37, S. 93).

Aufgabe 941. Prove that

$$-3\sqrt{3}/8 < \sin(B-C)\cos^3 A + \sin(C-A)\cos^3 B + \sin(A-B)\cos^3 C < 3\sqrt{3}/8$$

where A, B, C are the angles of a triangle.

M. S. Klamkin, Edmonton, CA

Aufgabe 942. Es sei

$$S_{n,k} := \sum_{j=1}^{nk} \frac{n^{k-1}}{n^k + j^k}, \qquad n, k \in \mathbf{N}.$$

Man ermittle $S_k := \lim_{n\to\infty} S_{n,k}$ sowie $S := \lim_{k\to\infty} S_k$.

Bemerkung: Bekannt sind $S_1 = \ln 2$ and $S_2 = \pi/2$ (Putnam Competition 1961/3).

M. Vowe, Therwil

Aufgabe 943. Das Produkt

$$\prod_{k=1}^{n-1} [\cos(2k\pi/n) - \cos(2\alpha)], \qquad n \geqslant 2, \qquad \alpha \in \mathbf{R}$$

ist geschlossen auszuwerten.

V. D. Mascioni, Origlio