Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **41 (1986)**

Heft 2

PDF erstellt am: **21.09.2024**

REFERENCES

1 G. Fejes Tóth: Kreisüberdeckungen der Sphäre. Studia Sci. Math. Hungar. *4*, 225–247 (1969).
2 L. Fejes Tóth: Covering a spherical surface with equal spherical caps (in Hungarian). Mat. Fiz. Lap. *50*, 40–46 (1943).
3 L. Fejes Tóth: Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1972.
4 T.W. Melnyk, O. Knop and W.R. Smith: Extremal arrangements of points and unit charges on a sphere: equilibrium configurations revisited. Can. J. Chem. *55*, 1745–1761 (1977).
5 T. Tarnai and Zs. Gáspár: Covering the sphere with equal circles. Conference on Intuitive Geometry, Siófok, Hungary, May 1985.

 0013-6018/86/060035-04$1.50 + 0.20/0

Kleine Mitteilungen

Die Einfachheit der Gruppe A_5

Der folgende Beweis der Einfachheit der Gruppe A_5 benötigt ausser dem Satz von Lagrange nur simpelste Kombinatorik und folgendes unmittelbare Korollar aus dem Isomorphiesatz:

$$(*)\ G \text{ Gruppe}, \quad N \trianglelefteq G, \quad x \in G, \quad (o(x), |G:N|) = 1 \Rightarrow x \in N.$$

A_n sei als Kern des Signumshomomorphismus eingeführt (eine elegante Darstellung dazu findet sich in [1, 2.1.3]). Dann enthält A_5 alle Doppeltranspositionen, wegen $|S_5 : A_5| = 2$ aber nach (*) auch alle Elemente ungerader Ordnung von S_5, also mindestens

$20 = 2 \cdot \binom{5}{3}$ Permutationen der Form (ijk) (Ordnung 3),
$24 = 4!$ Permutationen der Form $(ijklm)$ (Ordnung 5),
$15 = 5 \cdot \binom{3}{2}$ Permutationen der Form $(ij)(kl)$ (Ordnung 2).

Wegen $|A_5| = 60$ schöpfen diese mit dem Einselement ganz A_5 aus.
Sei nun $1 < N \triangleleft A_5$ und $a := |A_5 : N| \neq 1$. Es gilt: $|N| \mid 60$. Falls $3 \nmid a$, so folgt aus (*): $21 \leqq |N|$, also $|N| = 30$, damit $5 \nmid a$ und wiederum mit (*) der Widerspruch $30 = |N| \geqq 45$. Also gilt $3 \mid a$, und genauso $5 \mid a$. Daher folgt $|N| \mid 4$. Die Möglichkeit $|N| = 4$ führt, wieder nach (*), zu dem Widerspruch $4 = |N| \geqq 16$. Also ist $|N| = 2$, d.h. $N = \{id, (ij)(kl)\}$ aufgrund der Vollständigkeit der obigen Elementliste. Aber dann ist

$$N(ijk) = \{(ijk), (ikl)\} \neq \{(ijk), (jlk)\} = (ijk)N,$$

endgültig mit Widerspruch.

Hartmut Laue, Math. Seminar, Universität Kiel

LITERATURVERZEICHNIS

1 R. Schnabel: Elemente der Gruppentheorie. Stuttgart 1984.

 0013-6018/86/060038-01$1.50 + 0.20/0

Ein einfacher Beweis des Umkehrsatzes der Differentialrechnung

Bei der Vorbereitung auf die Prüfung für die Grundvorlesung Analysis entdeckte ich, dass es mir nicht möglich war, einen der beiden Beweise, mit denen ich mich ein halbes Jahr früher eingehend beschäftigt hatte, zu reproduzieren. Da mir die Aussage geometrisch plausibel erscheint, andererseits die mir vorgeführten Beweise verwirrend erschienen, habe ich mir einen eigenen Beweis zurechtgelegt. Im folgenden findet man die Teile des Beweises, die von den Standard-Methoden abweichen.

Ich danke Herrn Doz. P. Michor, der mir beim Verfassen der Arbeit geholfen hat.

Im folgenden ist der $\mathbf{R}^n$ mit der euklidischen Metrik $\|.\|$ versehen.

Satz. *Es sei U offen im* $\mathbf{R}^n$ *und* $f: U \to \mathbf{R}^n$ *eine differenzierbare Abbildung, so dass für* $x_0 \in U$ *die Jacobi-Matrix* $df(x_0)$ *invertierbar ist und df stetig ist bei* x_0. *Dann gibt es eine ε-Umgebung* $U_\varepsilon(x_0)$ *von* x_0, *so dass f injektiv ist auf* $U_\varepsilon(x_0)$. *Für jede Umgebung V von* x_0 *ist ausserdem* $f(V)$ *eine Umgebung von* $f(x_0)$.

Beweis: Wir beweisen zunächst die erste Aussage indirekt: Falls es keine Umgebung von x_0 gibt, auf der f injektiv ist, gibt es für jedes $k \in \mathbf{N}$ Punkte $x_k, y_k \in U_{1/k}(x_0)$ mit $f(x_k) = f(y_k)$. Sind $f = (f^1, \ldots, f^n)$ die Komponentenfunktionen, so ist die Funktion $g_{i,k}(t) := f^i(x_k + t(y_k - x_k))$ differenzierbar auf $[0,1]$ und erfüllt $g_{i,k}(0) = g_{i,k}(1)$. Nach dem Satz von Rolle existiert also ein $0 < t_{i,k} < 1$, so dass

$$0 = g_{i,k}'(t_{i,k}) = df^i(x_k + t_{i,k}(y_k - x_k)) \times (y_k - x_k)).$$

Wir betrachten nun die Matrix

$$M_k = \begin{pmatrix} df^1(x_k + t_{1,k}(y_k - x_k)) \\ \vdots \\ df^n(x_k + t_{n,k}(y_k - x_k)) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $M_k(y_k - x_k) = 0$, also ist $\det M_k = 0$. Aber weil df stetig ist bei x_0, und $x_k \to x_0, y_k \to x_0$, ist $\lim M_k = df(x_0)$, also $\det df(x_0) = \lim \det M_k = 0$ ein Widerspruch zu $df(x_0)$ invertierbar.

Nun beweisen wir die zweite Aussage. Jede Umgebung V von x_0 enthält eine abgeschlossene ε-Umgebung $W = \bar{U}_\varepsilon(x_0)$ für $\varepsilon > 0$, so dass $df(x)$ invertierbar ist für alle $x \in W$ und f injektiv ist auf W (nach der 1. Aussage). Falls $f(W)$ keine Umgebung von $f(x_0)$ ist, gibt es für jedes k ein $z_k \in \mathbf{R}^n \setminus f(W)$ mit $\|z_k - f(x_0)\| < {}^1/_k$. Nun sei $h_k(x) := \|f(x) - z_k\|^2, x \in U$. Dann ist h_k differenzierbar auf U, also stetig, also hat h_k ein Minimum auf der kompakten Menge W, bei $x_k \in W$ etwa. Wir behaupten, dass x_k ein Randpunkt von W ist. Wenn nicht, dann ist $dh_k(x_k) = 0$, aber aus $dh_k(x_k) \cdot y = 2\langle f(x_k) - z_k, df(x_k) \cdot y\rangle = 0$ für alle $y \in \mathbf{R}^n$ folgt der Widerspruch $f(x_k) = z_k$, weil $df(x_k)$ invertierbar ist. Daher ist jedes x_k im Rand ∂W enthalten. Weil ∂W kompakt ist, hat die Folge (x_k) einen Häufungspunkt $\bar{x} \in \partial W$.

Aber $\|f(x_k) - z_k\| \leq \|f(x_0) - z_k\| \leq 1/k$, weil h_k minimal bei x_k ist, also ist $\|f(x_k) - f(x_0)\| \leq \|f(x_k) - z_k\| + \|z_k - f(x_0)\| \leq 2/k$.
Weil f stetig ist, folgt $f(x_0) = f(\bar{x})$, $\|x_0 - \bar{x}\| = \varepsilon$, im Widerspruch zur Injektivität von f auf W.
Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Paul Sinclair, Universität Wien

 0013-6018/86/060039-02$1.50 + 0.20/0

Berichte

XI. Österreichischer Mathematikerkongress 1985

In Graz wurde vom 16. bis 20. September 1985 der XI. Österreichische Mathematikerkongress durchgeführt, veranstaltet von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, in ausgezeichneter Weise organisiert vom Institut für Mathematik der Karl-Franzens-Universität Graz. Der Kongressführer verzeichnet 668 Teilnehmer, die Mehrzahl selbstverständlich aus Österreich und Deutschland – die Deutsche Mathematiker-Vereinigung führte gleichzeitig ihre Mitgliederversammlung durch –, aber auch aus der Schweiz, aus Frankreich, Jugoslawien, Ungarn, Grossbritannien, aus dem Nahen Osten und aus Übersee. – Der Kongress begann mit einer feierlichen Eröffnung: Willkommensgruss der Tagungsleitung, Grussworte der Vertreter der Behörden, des Rektors der Universität, des Präsidenten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (Prof. A. Dold), Ansprache des Vorsitzenden der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (Prof. C. Christian). – Die jeweils einstündigen Hauptvorträge wurden gehalten von J. Moser, Zürich (Über den Stabilitätsbegriff bei Hamiltonschen Systemen), B.H. Matzat, Karlsruhe (Über das Umkehrproblem der Galoistheorie), R. Schneider, Karlsruhe (Zufallsgeometrie), W.K. Hayman, London (Schlichte Funktionen); den Abschluss bildete ein Vortrag von K. Strubecker, Karlsruhe (Wilhelm Blaschkes mathematisches Werk). Dazwischen wurden wie üblich in 12 verschiedenen Sektionen eine ansehnliche Zahl von halbstündigen Sektionsvorträgen durchgeführt; eine sehr reichhaltige Buchausstellung stiess auf grosses Interesse. – Der Kongress bot zahlreiche Möglichkeiten zur Kontaktnahme unter Kollegen, was ja immer eine besonders angenehme Seite solcher Veranstaltungen darstellt. Zudem verwöhnten die Organisatoren in ihrer echt österreichischen Gastfreundschaft die Teilnehmer mit Empfängen, mit einem Konzert, mit dem Angebot von verschiedenen Ausflügen und einem gediegenen Damenprogramm. Dafür und für alle ihre Bemühungen bei der Vorbereitung und Durchführung des Kongresses gebührt ihnen der herzliche Dank aller Teilnehmer.

Robert Ineichen, Fribourg