Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **41 (1986)**

Heft 1

PDF erstellt am: **20.09.2024**

yield an expansion of length at most $n + 1$. Over the integers, the related algorithms both yield expansions for a/b of length at most a.
However, the algorithms differ greatly in size of the terms produced. The largest degree term produced by the Farey series algorithm is clearly $1/Q_1 Q_2$ which has degree at most $2q_1 - 1$ since $\deg Q_2 < \deg Q_1 = q_1$. The Fibonacci type algortihm yields a bound depending on both degrees of P and Q. In the worst case, where $\deg P = q - 1$, the largest term may have degree as large as $2^{q_1 - 1}$. This behavior again mirrors that of the related algorithms over the ordinary integers.

William A. Webb, Department of Mathematics
Washington State University

REFERENCES

1 L. Carlitz: Representations of arithmetic functions in $GF[p^r, x]$. Duke Math. J. *14*, 1121–1137 (1947).
2 D. Dobbs and R. McConnel: An Egyptian algorithm for polynomials. El. Math. *39*, 126–129 (1984).
3 D. R. Hayes: The expression of a polynomial as a sum of three irreducibles. Acta Arith. *11*, 461–488 (1966).

 0013-6018/86/060006-06$1.50 + 0.20/0

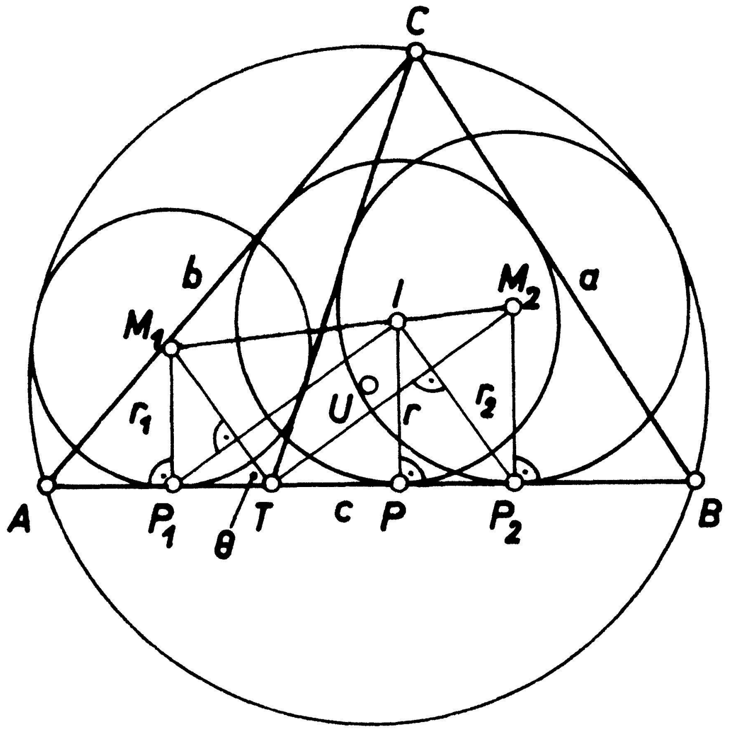
Kleine Mitteilungen

Über eine Vermutung von Thébault

Die hier behandelte Aufgabe wurde 1938 von V. Thébault in [2] gestellt und erschien in beiden Auflagen von C. Stanley Ogilvys Buch «Tomorrow's Math., Unsolved Problems for the Amateur» (Oxford University Press: 1962, p. 70; 1972, p. 82). Erst 45 Jahre später fand K. B. Taylor eine Lösung, die aber wegen ihrer beträchtlichen Länge (24 Seiten) nur in Form eines knappen Auszugs abgedruckt wurde [1]. In der vorliegenden Note soll ein kurzer Beweis gegeben werden.

Satz. *Es sei T ein beliebig gewählter Punkt auf der Seite c des Dreiecks ABC. (M_1, r_1) bzw. (M_2, r_2) seien die Kreise, die AT, TC bzw. BT, TC und den Umkreis (von innen) berühren. Ist I der Mittelpunkt des Inkreises und r sein Radius, dann liegen M_1, M_2 und I kollinear. Bezeichnet θ die Hälfte des Winkels ATC, dann gilt weiter $\overline{M_1 I} : \overline{IM_2} = \sin^2\theta : \cos^2\theta$ und $r_1 \cos^2\theta + r_2 \sin^2\theta = r$.*
(Anstelle von $r_1 \cos^2\theta + r_2 \sin^2\theta = r$ wurde von Thébault (und Ogilvy) fälschlich $r_1 + r_2 = r^2 \sec^2\theta$ angegeben; vgl. [1].)

Beweis: P_1 sei der Schnittpunkt von AB mit dem Lot durch I auf die innere Winkelsymmetrale des Winkels ATC, und M_1 sei der Schnittpunkt des Lotes durch P_1 auf AB mit dieser Winkelsymmetralen; M_2 ist analog zu definieren. Der Kreis mit Mittelpunkt M_1 und Radius $r_1 = \overline{M_1 P_1}$ berührt dann AT und TC. Es bleibt nachzuweisen, dass er auch den Umkreis (von innen) berührt; dies ist äquivalent zu $\overline{UM_1} = R - r_1$, wobei R den



Figur 1

Radius und U den Mittelpunkt des Umkreises bezeichnet. Ist Q_i der Schnittpunkt von P_iM_i mit $IP_j (i \neq j)$, dann ist das Teilverhältnis $(P_iM_iQ_i)$ gleich dem Teilverhältnis (P_iTP_j), also $(P_1M_1Q_1) = (Q_2M_2P_2)$. Da die Geraden P_1M_1 und P_2M_2 parallel sind, muss der Schnittpunkt I von P_1Q_2 mit Q_1P_2 auf M_1M_2 liegen. Ist P der Fusspunkt des Lotes von I auf AB, dann gilt $\overline{P_1P} = r\tan\theta$ und $\overline{PP_2} = r\cot\theta$, also folgt

$$\overline{M_1I} : \overline{IM_2} = \overline{P_1P} : \overline{PP_2} = \sin^2\theta : \cos^2\theta .$$

Aus $r_1 = \overline{P_1T}\tan\theta$ und $r_2 = \overline{TP_2}\cot\theta$ ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} r_1\cos^2\theta + r_2\sin^2\theta &= (\overline{P_1T} + \overline{TP_2})\sin\theta\cos\theta = (\overline{P_1P} + \overline{PP_2})\sin\theta\cos\theta \\ &= r(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r . \end{aligned}$$

Es bleibt $\overline{UM_i} = R - r_i (i = 1,2)$ zu zeigen, wobei man sich aus Symmetriegründen auf $i = 1$ beschränken kann. Da U den Abstand $\frac{c}{2}\cot\gamma$ von AB hat, ist die Behauptung äquivalent zu

$$\left(P_1B - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(r_1 - \frac{c}{2}\cot\gamma\right)^2 = (R - r_1)^2 ;$$

die Seiten und Winkel des Dreiecks werden wie üblich mit a, b, c bzw. α, β, γ bezeichnet. Unter Berücksichtigung von $R = \frac{c}{2}(\sin\gamma)^{-1}$ erhält man daraus

$$\overline{P_1B}^2 - c\overline{P_1B} - cr_1\cot\gamma = -cr_1(\sin\gamma)^{-1},$$

also

$$\frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}\, c r_1 = \overline{P_1B}\,(c - \overline{P_1B}).$$

Setzt man $2s = a + b + c$, dann gilt $\overline{P_1B} = \overline{P_1P} + \overline{PB} = r\tan\theta + s - b$ und $\dfrac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma} = \tan\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r}{s-c}\cdot$ Daher ist die Behauptung äquivalent zu

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{s-c}{rc}(r\tan\theta + s - b)(s - a - r\tan\theta) \\ &= \frac{s-c}{rc}((s-a)(s-b) - r(a-b)\tan\theta - r^2\tan^2\theta) \\ &= \frac{s-c}{c}\left(\frac{rs}{s-c} - (a-b)\tan\theta - r\tan^2\theta\right), \end{aligned}$$

wobei $r^2 = s^{-1}(s-a)(s-b)(s-c)$ verwendet wurde.
Nach Konstruktion war

$$r_1 = \overline{P_1T}\tan\theta = (\overline{P_1B} - \overline{TB})\tan\theta = (r\tan\theta + s - b - \overline{TB})\tan\theta$$

und nach dem Sinussatz gilt

$$\begin{aligned} \overline{TB} &= a\frac{\sin(2\theta-\beta)}{\sin 2\theta} = a\left(\cos\beta - \sin\beta\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}\right) \\ &= a\left(\cos\beta + \frac{1}{2}\sin\beta(\tan\theta - \cot\theta)\right). \end{aligned}$$

Es folgt

$$r_1 = \frac{a}{2}\sin\beta + (s - b - a\cos\beta)\tan\theta + \left(r - \frac{a}{2}\sin\beta\right)\tan^2\theta.$$

Wegen $\dfrac{ac}{2}\sin\beta = rs$ und $2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$ erhält man daraus

$$\begin{aligned} cr_1 &= rs + \frac{1}{2}((a - b + c)c - (a^2 + c^2 - b^2))\tan\theta + (rc - rs)\tan^2\theta \\ &= rs - (a-b)(s-c)\tan\theta - r(s-c)\tan^2\theta, \end{aligned}$$

wie behauptet.

Gerhard Turnwald, Technische Universität, Wien

LITERATURVERZEICHNIS

1 K. B. Taylor: Solution of Problem 3887. Amer. Math. Monthly *90*, 486–487 (1983).
2 V. Thébault: Problem 3887. Amer. Math. Monthly *45*, 482–483 (1938).

 0013-6018/86/060011-03$1.50 + 0.20/0

Eine allgemeine logarithmische Ungleichung

In dieser kleinen Mitteilung soll eine allgemeine logarithmische Ungleichung bewiesen werden. Diese Ungleichung hat ihren Ursprung im Mittelwertsatz der Differentialrechnung [4], den Dieudonné ([1], S. 149) kommentiert: «... die wirkliche Natur des Mittelwertsatzes kommt zum Ausdruck, wenn man ihn als Ungleichung, nicht aber als Gleichung schreibt.»
Zuvor erinnern wir an das logarithmische Mittel und das (Potenz-) Mittel der Ordnung p ($p \in \mathbf{R}$) für zwei Zahlen $x, y \in \mathbf{R}^+$ in der folgenden *Definition.*

$$L(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x-y}{\log x - \log y} & \text{für } x \neq y \\ x & \text{für } x = y \end{cases},$$

$$M_p(x,y) := \begin{cases} \left(\dfrac{x^p + y^p}{2}\right)^{1/p} & \text{für } p \neq 0 \\ \sqrt{xy} & \text{für } p = 0 \end{cases}.$$

log bezeichnet hier die natürliche Logarithmus-Funktion.

Satz. Für $0 < a < b$ sei die Funktion $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ positiv und stetig in $[a,b]$. Weiterhin sei f differenzierbar in $]a,b[$ und f' dort positiv. Dann gilt:

$$M_0(f(a),f(b)) < L(f(a),f(b)) < M_{1/3}(f(a),f(b)). \tag{1}$$

Beweis: Wir definieren $g: [a,b] \to \mathbf{R}$ und $h: [a,b] \to \mathbf{R}$ durch

$$g(x) := \log f(x) + \frac{1}{M_0(f(a),f(b))}(f(a) - f(x)),$$

$$h(x) := \log f(x) + \frac{1}{M_{1/3}(f(a),f(b))}(f(a) - f(x)).$$

Nach dem Mittelwertsatz existieren dann $c, d \in]a,b[$ derart, dass

$$g(b) - g(a) = -(b-a)\frac{f'(c)[M_0(f(a),f(c)) - f(a)]^2}{2[M_0(f(a),f(c))]^3} < 0,$$

$$h(b) - h(a) = (b-a)\frac{f'(d)[\sqrt[3]{f(d)} - \sqrt[3]{f(a)}]^4}{f(d)[\sqrt[3]{f(d)} + \sqrt[3]{f(a)}]^4} > 0.$$

Die Ungleichung (1) ist nun eine einfache Folgerung aus

$$g(b) - g(a) < 0 < h(b) - h(a).$$

Bemerkung: Mit f erfüllt auch die Funktion $\sqrt{f}$ die Voraussetzungen des Satzes. Daraus ergibt sich folgende offensichtliche linksseitige Verschärfung von (1):

$$M_0(\sqrt{f(a)},\sqrt{f(b)})\cdot M_1(\sqrt{f(a)},\sqrt{f(b)}) < L(f(a),f(b)).$$

Zusammen mit der bekannten ([3], S. 76) Abschätzung

$$M_{1/3}(f(a),f(b)) < M_{1/2}(f(a),f(b)) < M_1(f(a),f(b)) \tag{2}$$

liefert sie eine entsprechende Ungleichungskette.

Für Anwendungen wichtige, teilweise bekannte Ungleichungsketten lassen sich auf die aus (1) und (2) gebildete Ungleichungskette zurückführen. Abschliessend sollen noch zwei solche Spezialfälle angegeben werden.

a) $f = id$ ([3], S. 273)

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\log a - \log b} < \left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{2}\right)^3 < \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 < \frac{a+b}{2} \tag{3}$$

Mit $t := \frac{b}{a} > 1$ lässt (3) sich zu der Ungleichungskette

$$\frac{2(t-1)}{t+1} < \frac{4(t-1)}{(\sqrt{t}+1)^2} < \frac{8(t-1)}{(\sqrt[3]{t}+1)^3} < \log t < \frac{t-1}{\sqrt{t}} \tag{4}$$

umformen, wobei die rechtsstehende Ungleichung von Karamata ([3], S. 272) stammt. (4) ist offensichtlich eine Verschärfung der bekannten elementaren Ungleichung

$$\frac{t-1}{t} < \log t < t-1 \quad \text{für} \quad t > 1.$$

Darüber hinaus sei noch bemerkt, dass (4) äquivalent ist mit den beiden Ungleichungsketten ([2], S. 55; [3], S. 273)

$$\frac{2}{2a+1} < \frac{4}{2a+1+2\sqrt{a(a+1)}} < \frac{8}{2a+1+3(\sqrt[3]{a^2(a+1)}+\sqrt[3]{a(a+1)^2})}$$
$$< \log\left(1+\frac{1}{a}\right) < \frac{1}{\sqrt{a(a+1)}} \quad \text{für } a > 0,$$

$$\frac{2b}{2+b} < \frac{4b}{2+b+2\sqrt{1+b}} < \frac{8b}{2+b+3(\sqrt[3]{1+b}+\sqrt[3]{(1+b)^2})}$$
$$< \log(1+b) < \frac{b}{\sqrt{1+b}} \quad \text{für } b > 0.$$

Mit $t := \frac{1}{2}\log\frac{b}{a} > 0$ lässt (3) sich auch umformen zu der elementaren Ungleichungskette

$$\frac{1}{\sinh t} < \frac{1}{t} < \frac{\left(\cosh\frac{t}{3}\right)^3}{\sinh t} < \frac{\left(\cosh\frac{t}{2}\right)^2}{\sinh t} < \frac{1}{\tanh t}.$$

b) $f = \exp$

$$e^{\frac{a+b}{2}} < \frac{e^a - e^b}{a-b} < \left(\frac{e^{\frac{a}{3}} + e^{\frac{b}{3}}}{2}\right)^3 < \left(\frac{e^{\frac{a}{2}} + e^{\frac{b}{2}}}{2}\right)^2 < \frac{e^a + e^b}{2}$$

Dieter Rüthing, Paderborn, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

1 J. Dieudonné: Grundzüge der modernen Analysis. Vieweg-Verlag, Braunschweig 1972.
2 E. R. Love: Some logarithm inequalities. Math. Gaz. *64*, 55–57 (1980).
3 D. S. Mitrinović: Analytic Inequalities. Springer Verlag, New York–Heidelberg–Berlin 1970.
4 D. Rüthing: A derivation of some classical inequalities from the mean value theorem. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. *15*, 653–659 (1984); *16*, 149 (1985).

Nachtrag der Redaktion. Bei der Drucklegung dieser Kleinen Mitteilung sind wir auf eine Note von T. P. Lin (The power means and the logarithmic mean; Am. Math. Monthly 81 (1974), p. 879–883) aufmerksam geworden, in der aus der Ungleichung

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\log a - \log b} < \left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2}\right)^3, \quad \text{für} \quad a > 0, b > 0, a \neq b$$

die Abschätzung (1) mit wesentlich schwächeren Restriktionen für f gefolgert wird. Es genügt, dass f positiv und $f(a) \neq f(b)$ ist.

 0013-6018/86/060014-03$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 917. Man betrachte die Menge aller einem gegebenen Dreieck ABC einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecke $A'B'C'$ mit $A' \in \overline{BC}, B' \in \overline{CA}, C' \in \overline{AB}$ und den Seitenmitten $L \in B'C', M \in C'A', N \in A'B'$.
Man zeige: L, M, N liegen auf je einer festen Geraden l, m, n.

L. Kuipers, Sierre

Lösung: Wir betrachten allgemeiner eine Schar zueinander ähnlicher Dreiecke $A'B'C'$ mit $A' \in \overline{BC}, B' \in \overline{CA}, C' \in \overline{AB}$ und zeigen: Jede Menge von einander entsprechenden Punkten dieser Dreiecke liegt auf einer jeweils festen Geraden.
Zum Beweis sei A als Nullpunkt der komplexen Ebene gewählt. O. B. d. A. sei $\sphericalangle BAC + \sphericalangle B'A'C' \neq \pi$ angenommen. Bezeichnen wir noch mit $a, a', \ldots$ die den Punkten $A, A', \ldots$ entsprechenden komplexen Zahlen, so gilt für jedes der betrachteten Dreiecke mit geeigneten $x, y, z \in \mathbf{R}$:

$$a' = b + x(c-b), \quad b' = yc, \quad c' = zb. \tag{1}$$