Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **38 (1983)**

Heft 3

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Lemma 1. *The points in E^4 with two odd and two even coordinates form a* $\{3,4,3,3\}$ *lattice* ([2], p. 158).

Lemma 2. *The points in E^4 whose coordinates are integers of the same parity form a* $\{3,3,4,3\}$ *lattice.*

Proof of lemma 2: Since the unit cells of the $\{3,4,3,3\}$ lattice have the same orientation in space ([2], p. 156), we can reach any of them by a translation of the cell centered at the origin – the one with vertices $(\pm 1, \pm 1, 0, 0)$ and permutations. The images of these 24 points under translation through (a,b,c,d) will have the required two odd and two even coordinates if and only if a,b,c,d are integers of the same parity. The points (a,b,c,d), being the centers of the translated cells, will form a reciprocal $\{3,3,4,3\}$ lattice.
It follows from lemmas 1 and 2 that if a polytope can be embedded in $\{3,4,3,3\}$ or in $\{3,3,4,3\}$, then it can also be embedded in the cubic lattice $\{4,3,3,4\}$. Conversely, by doubling the Cartesian coordinates of a polytope embedded in $\{4,3,3,4\}$ and translating the resulting figure either through $(1,1,0,0)$ or through $(0,0,0,0)$, we will obtain a similar polytope which satisfies the respective parity requirements of $\{3,4,3,3\}$ or $\{3,3,4,3\}$. Therefore:

Theorem. *The same polytopes can be embedded in each of the regular four-dimensional lattices.*

With this result, the lattice polytope problem is completely solved.

Gregg N. Patruno, 373 Giffords Lane, Staten Island, NY, USA

REFERENCES

1 O. Buggisch: Aufgabe 709. El. Math. *30,* 15 (1975).
2 H.S.M. Coxeter: Regular Polytopes, 2nd ed. Macmillan, New York 1963.
3 J. Hammer: Unsolved Problems Concerning Lattice Points. Research Notes in Mathematics, No. 15. Pitman, London, San Francisco, Melbourne 1978.
4 W. Scherrer: Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter. El. Math. *1,* 97–98 (1946).
5 L. Schläfli: Theorie der vielfachen Kontinuität. Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft *38,* 1–237 (1901).
6 I.J. Schoenberg: Regular simplices and quadratic forms. J. Lond. Math. Soc. *12,* 48–55 (1937).

 0013-6018/83/030069-03\$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 879. Welche Beziehung besteht zwischen dem Abstand und dem Winkel irgend zweier windschiefer Erzeugenden eines einschaligen Drehhyperboloids?

W. Wunderlich, Wien, A

Lösung: Sei

$$\Gamma=\{x\in\mathbf{R}^3 \mid x_1^2/r^2+x_2^2/r^2-x_3^2/s^2=1\}$$

das Drehhyperboloid. Sei weiter a Richtungsvektor der einen Erzeugenden auf Γ, also o.E.d.A.

$$a=(0,a_2,a_3):=(0,\cos\varepsilon,\sin\varepsilon), \qquad 0<\varepsilon<\pi/2.$$

Dabei bezeichnet ε den Neigungswinkel von a zur x_1x_2-Ebene. Durch eine Drehung R um die x_3-Achse mit dem Drehwinkel β geht a in die Richtung $Ra=b$ der zweiten Erzeugenden über. Für den Winkel δ zwischen beiden Erzeugenden gilt also

$$\cos\delta=a\cdot b=(0,a_2,a_3)\cdot(-a_2\sin\beta,a_2\cos\beta,a_3).$$

Hieraus folgt

$$\cos\beta=(\cos\delta-a_3^2)/a_2^2. \qquad (*)$$

Für den Abstand d der Erzeugenden findet man

$$\begin{aligned} d\sin\delta &= |(a\times b)\cdot(re_1-rRe_1)| \\ &= ra_2a_3|(1-\cos\beta,-\sin\beta,\sin\beta)\cdot(1-\cos\beta,-\sin\beta,0)|. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit $(*)$

$$\begin{aligned} d &= 2ra_2a_3(1-\cos\beta)/\sin\delta=2ra_3/a_2\cdot\sqrt{(1-\cos\delta)/(1+\cos\delta)} \\ &= (2ra_3/a_2)\tan\delta/2. \end{aligned}$$

und daraus wegen $a_3/a_2=\tan\varepsilon=s/r$:

$$d=2r\tan\varepsilon\tan\delta/2=2s\tan\delta/2.$$

A. Müller, Zürich

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht), R. Cruse (Karlsruhe, BRD), L. Kuipers (Sierre), O.P. Lossers (Eindhoven, NL; 2 Lösungen), V.D. Mascioni (Origlio), Th. Müller (Thallern, A), E. Ungethüm (Wien, A; 4 Lösungen).

Aufgabe 881. Zu drei gegebenen Kreisen, die in drei verschiedenen nicht demselben Büschel angehörenden Ebenen und nicht auf derselben Kugel liegen, gibt es im allgemeinen (Ausnahmen!) genau eine Ebene, welche diese Kreise in sechs Punkten eines Kreises schneidet (imaginäre Schnittpunkte mitgerechnet). Dies ist zu zeigen.

C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung: Legt man durch die beiden ersten der drei gegebenen Kreise k_1,k_2,k_3 je eine beliebige Kugel, so schneidet sich ihre Potenzebene mit den beiden Kreisebenen im allgemeinen in einem Punkt A, welcher die gleiche Potenz in bezug auf die beiden gewählten Kreise k_1,k_2 hat. Folglich schneidet jede durch A verlaufende

Ebene k_1 und k_2 je in zwei (möglicherweise imaginären) Punkten, die demselben Kreis angehören. In analoger Weise bestimmen die Kreise k_1, k_3 einen Punkt B sowie k_2, k_3 einen Punkt C. Die im allgemeinen eindeutig bestimmte Ebene durch A, B und C schneidet daher k_1, k_2 und k_3 in sechs Punkten eines Kreises (denn nimmt man im Gegensatz dazu an, dass die sechs Schnittpunkte je zu viert auf drei verschiedenen Kreisen liegen, so müssten A, B und C gleichwohl je dieselbe Potenz bezüglich dieser drei Kreise aufweisen, was aber nur dann der Fall wäre, wenn A, B, C auf einer Geraden liegen würden. Dies ist aber ausgeschlossen, weil die gegebenen Kreisebenen nicht demselben Büschel angehören dürfen.)
Ausnahmefälle liegen etwa vor, wenn genau zwei der drei gegebenen Kreisebenen parallel zueinander sind, zwei Kreise auf einer Kugel liegen oder die drei Kreise konzentrisch sind. Dann kann es keine oder beliebig viele Ebenen mit der verlangten Schnitteigenschaft geben.

Hj. Stocker, Wädenswil

Eine weitere Lösung sandte L. Kuipers (Sierre).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Dezember 1983* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A*, *B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68). Problem 872A (Band 36, S. 175), Aufgabe 880 (Band 37, S. 93).

Aufgabe 896. If a_1, a_2, a_3 are the sides of a triangle $A_1A_2A_3$ and R_1, R_2, R_3 are the distances from an arbitrary point P in the plane of the triangle to the vertices A_1, A_2, A_3, prove that

$$\sum_{i=1}^{3} a_i R_i (a_i^4 + R_i^4) \geqslant 10 \prod_{i=1}^{3} a_i R_i .$$

M. S. Klamkin, Edmonton, CDN

Aufgabe 897. Für positive reelle x und natürliche n sei

$$S_n(x) := \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant x \\ (k,n)=1}} \mu(k)\,[x/k]$$

(μ: Möbiusfunktion, [ ]: Ganzteilfunktion). Man zeige: $S_n(x)$ ist gleich der Anzahl der Teiler t von $n^{[\log_2 x]}$ mit $t \leqslant x$.

K. Szabo, Miskolc, Ungarn