

The sum of the s -th power of the integers

Autor(en): **Pinchuk, Moshe**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **38 (1983)**

Heft 1

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-37180>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Aufgabe 891. Es sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ stetig und

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Man zeige, dass

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 (f(x))^2 dx.$$

Wann genau gilt das Gleichheitszeichen?

H.-J. Seiffert, Berlin, BRD

Aufgabe 892. Für natürliche Zahlen n sei

$$a_n := \int_0^n \exp(t^2/n) dt.$$

Man ermittle $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}/a_n)$.

U. Abel, Giessen, BRD

Aufgabe 893. Es sei p eine ungerade Primzahl, g eine Primitivwurzel mod p und m eine prime Restklasse mod p . Man zeige, dass für $x \not\equiv 0 \pmod{p}$

$$\text{ind}_g x \equiv \sum_{i=1}^{p-2} (1 - g^i)^{p-2} x^i \pmod{p}.$$

Dabei bezeichnet $\text{ind}_g x$ die kleinste der natürlichen Zahlen k , für die $m \equiv g^k \pmod{p}$ erfüllt ist.

H. Bergmann, Hamburg, BRD

Elementarmathematik und Didaktik

The sum of the s -th power of the integers

The purpose of this brief note is to present a derivation of the familiar formula for the sum of the squares of the first n integers, i.e. $\sum_{k=1}^n k^2$. This method is easy to remember, having an almost geometric character, and it can be iterated in a very simple manner to yield the sum of the first n integers raised to any positive integral power.

Consider the following $n \times n$ array:

1	2	3	4	...	n
1	2	3	4	...	n
1	2	3	4	...	n
1	2	3	4	...	n

The line is drawn just below the main diagonal.

Denote the sum of all the numbers in the array by S , the sum of the integers above the line by U and the sum of those below the line by B .

S and B can be evaluated by summing the rows and in both cases we have to add sums of arithmetic progressions. Indeed,

$$S = \frac{n^2(n+1)}{2} \quad \text{and} \quad B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2}.$$

U is calculated by adding the columns and we find $U = \sum_{k=1}^n k^2$.

Since $U = S - B$ we obtain

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^2(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{n(n+1)}{4}$$

or

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 = n^2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) \frac{(2n+1)}{2}$$

or

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

To obtain the sum of the cubes of the first n integers, replace every entry in the array by its *square* and proceed as before. In this case

$$U = \sum_{k=1}^n k^3, \quad S = n \sum_{k=1}^n k^2 \quad \text{and} \quad B = \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^m k^2 \right).$$

In general, replace every entry in the array by its $(s-1)$ -th power and obtain

$$\sum_{k=1}^n k^s = n \sum_{k=1}^n k^{s-1} - \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^m k^{s-1} \right).$$

Moshe Pinchuk, Jerusalem, Israel