Quelques considérations concernant le problème de l'aiguille de Buffon dans l'espace euclidien En

Autor(en): **Stoka, Marius I.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **38 (1983)**

Heft 1

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-37175

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

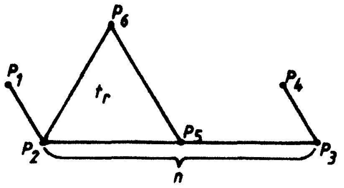

Figure 7a

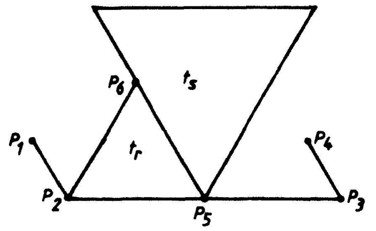

Figure 7b

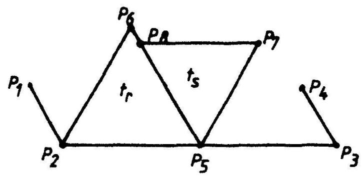

Figure 7c

After a suitable translation, rotation and reflection if necessary we can assume that the given S_n has the position shown in figure 1. With the notations of figure 1, let t_r be the triangle of the tesselation which 'stands on the base of S_n at the left corner', which means that t_r is defined by the three conditions $P_2 \in t_r$, $R_n \cap t_r \neq \phi$, $\overline{P_2P_3}$ contains a side of t_r (see fig. 7a). The vertices of t_r may be P_2, P_5 and P_6, where $P_5 \in \overline{P_2P_3}$. Since S_n has property a) or b), P_3 is different from P_5.
Let t_s denote the neighbor of t_r at the side $\overline{P_5P_6}$ such that $P_5 \in t_s$. We now have to distinguish whether l_s is greater or less than l_r.

Case 1. If $l_s > l_r$, the points P_2 and P_6 define a set $S_{l_r} \subset D$ with $R_{l_r} \cap t_r = \phi$ (see fig. 7b). Moreover, $l_r \leq n-1$ because $S_n \subset D$ and $l_1 = 1$. So we can define $m = l_r$.

Case 2. If $l_s < l_r$, let P_7 denote the vertex of t_s that is not a point of t_r and let P_8 denote its third vertex (fig. 7c). An examination of all possible line systems starting at P_7 (they are listed in fig. 4) shows that in each case there is a set $S_{l_s} \subset D$ with $R_{l_s} \cap t_s = \phi$, either defined by the points P_5 and P_7 or by P_7 and P_8. Moreover, $l_s < l_r \leq n-1$. So we can define $m = l_s$.
Hence the induction step is completed, q.e.d.

Karl Scherer, Universität Kaiserslautern

REFERENCES

1 W. Tutte: Squaring the Square. Can. J. Math. *1950*, 197–209.
2 Ross Honsberger: Ingenuity in Mathematics. Mathematical Association of America 23, Yale University, 1970.

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/83/010001-04$1.50 + 0.20/0

Quelques considérations concernant le problème de l'aiguille de Buffon dans l'espace euclidien E_n

0. Soit E_n l'espace euclidien à n dimensions de coordonnées $x_1, \dots, x_n$.
La mesure élémentaire cinématique dans E_n, invariante par rapport au groupe de mouvements euclidiens, est [1]:

$$dK = dP \wedge dO_{n-1} \wedge \cdots \wedge dO_1, \tag{1}$$

où $dP = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ et dO_h est l'élément d'aire sur la sphère h-dimensionnelle unité dans l'espace E_n.

Notons $\Re_n$ le réseau déterminé par des parallélépipèdes de côtés parallèles aux axes de coordonnées et de longueurs respectives $a_1, \dots, a_n$.

En utilisant la mesure cinématique (1), nous avons démontré le théorème suivant [3], p. 388:

La probabilité pour qu'un segment aléatoire ω de longueur $l < \inf(a_1, \dots, a_n)$, uniformément distribué par rapport à la mesure (1), coupe le réseau est

$$p = 1 - \frac{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}} \cdot \frac{P_n(l; a_1, \dots, a_n)}{a_1 \cdots a_n}, \tag{2}$$

où

$$\begin{aligned} P_n(l; a_1, \dots, a_n) = \int_0^{\pi/2} \cdots \int_0^{\pi/2} & (a_1 - l\cos\varphi_1)(a_2 - l\sin\varphi_1\cos\varphi_2) \\ & \cdots (a_n - l\sin\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{n-1}) \sin^{n-2}\varphi_1 \\ & \cdots \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Dans la première partie de ce travail, nous démontrons que les événements d'un système d'événements associé à la configuration $(\omega, \Re_n)$ sont dépendants et, dans la deuxième partie, nous nous occupons de l'estimation de la probabilité (2).

1. Notons $\Re$ le réseau déduit de $\Re_n$ pour $a_1 = \cdots = a_n = 2l$ c'est-à-dire le réseau déterminé par des hyperplans parallèles aux hyperplans de coordonnées et de distances respectives égales à $2l$.

Soit A_i l'événement: le segment ω coupe un hyperplan du réseau $\Re$ parallèle à l'hyperplan d'équation $x_i = 0$.

Nous voulons démontrer que les événements $A_1, \dots, A_n$ sont dépendants.

Notons par lim* la limite obtenue lorsque toutes les quantités $a_1, \dots, a_n$, à l'exception de celles qui sont indiquées ci-dessous, tendent vers l'infini.

Avec cette notation on a

$$\left\{\begin{array}{l} P(A_i) = \lim\limits_{a_i = 2l}^{*} p, \\[2ex] P(A_i \cup A_j) = \lim\limits_{\substack{a_i = 2l \\ a_j = 2l}}^{*} p, \\[2ex] P(A_i \cup A_j \cup A_k) = \lim\limits_{\substack{a_i = 2l \\ a_j = 2l \\ a_k = 2l}}^{*} p, \\ \text{— — — — — — — — — — — — — —} \\ P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = p(a_1 = \cdots = a_n = 2l). \end{array}\right. \tag{4}$$

Mais, dans le travail cité [3], p. 387, nous avons démontré que

$$\begin{aligned} P_n(l; a_1, \dots, a_n) = a_0^{(n)} l^n + \{a_1, \dots, a_n\}_1 a_1^{(n)} l^{n-1} + \cdots \\ + \{a_1, \dots, a_n\}_{n-1} a_{n-1}^{(n)} l + \{a_1, \dots, a_n\}_n a_n^{(n)}, \end{aligned} \tag{5}$$

où $a_0^{(n)},\ldots,a_n^{(n)}$ sont des constantes et $\{a_1,\ldots,a_n\}_h$ est la fonction symétrique élémentaire d'ordre h de $a_1,\ldots,a_n$.
Alors les formules (4) nous donnent

$$\left\{\begin{aligned}
P(A_i)&=-\frac{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}}\cdot a_{n-1}^{(n)}\cdot\frac{1}{2},\\
P(A_i\cup A_j)&=-\frac{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}}\left[2a_{n-1}^{(n)}\cdot\frac{1}{2}+a_{n-2}^{(n)}\cdot\frac{1}{2^2}\right],\\
P(A_i\cup A_j\cup A_k)&=-\frac{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}}\left[3a_{n-1}^{(n)}\cdot\frac{1}{2}+3a_{n-2}^{(n)}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot a_{n-3}^{(n)}\frac{1}{2^3}\right],\\
P(A_1\cup\cdots\cup A_n)&=-\frac{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}}\left[\binom{n}{1}a_{n-1}^{(n)}\cdot\frac{1}{2}+\binom{n}{2}a_{n-2}^{(n)}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots\right.\\
&\qquad\left.+\binom{n}{n}a_0^{(n)}\frac{1}{2^n}\right].
\end{aligned}\right.\tag{6}$$

On a la formule

$$P(A_1\cap\cdots\cap A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i\neq j}P(A_i\cup A_j)+\sum_{i\neq j\neq k}P(A_i\cup A_j\cup A_k)-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}P(A_1\cup\cdots\cup A_n).$$

En tenant compte des relations (6) et de

$$\binom{k}{k}\binom{n}{k}-\binom{k+1}{k}\binom{n}{k+1}+\binom{k+2}{k}\binom{n}{k+2}-\cdots$$
$$+(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n}{n}=0,$$

nous obtenons

$$P(A_1\cap\cdots\cap A_n)=(-1)^n\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{n/2}}a_0^{(n)}.\tag{7}$$

Mais la formule (5) nous donne

$$a_0^{(n)}=\frac{P_n(l;0,\ldots,0)}{l^n},$$

donc, compte tenu de (3),

$$a_0^{(n)}=(-1)^n\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-3}\varphi_1\cos\varphi_1\,d\varphi_1\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-5}\varphi_2\cos\varphi_2\,d\varphi_2$$
$$\cdots\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-2}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-1}\,d\varphi_{n-1}=\frac{(-1)^n}{2^{n-1}(n-1)!}$$

et (7) devient

$$P(A_1\cap\cdots\cap A_n)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^n\pi^{n/2}(n-1)!}\,. \tag{8}$$

Dans le travail cité, nous avons démontré la relation [3], p. 388:

$$\lim_{a_1=2l}{}^{*}p=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}},$$

donc, compte tenu de la première relation (4),

$$P(A_j)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\pi^{n/2}},\qquad (j=1,\dots,n). \tag{9}$$

Alors

$$P(A_1)\cdots P(A_n)=\frac{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^n}{(n-1)^n\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^n\pi^{n/2}}\,. \tag{10}$$

Considérons maintenant le rapport

$$\rho(n)=\frac{\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^n\pi^{n/2}(n-1)!}}{\dfrac{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^n}{(n-1)^n\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^n\pi^{n/2}}}\,.$$

On a

$$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}\,,\qquad (\forall k\in\mathbf{N}^*),$$

donc

$$\rho(2k+1)=\frac{(2k)^{2k}[(k-1)!]^{2k}}{2^{2k+1}(2k-1)!\left[\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k}\right]^{2k}\pi^k}\neq 1,$$

$$\rho(2k+2)=\frac{(2k+1)^{2k+1}\left[\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k}\right]^{2k+2}\pi^{k+1}}{2^{2k+2}(2k)!\,(k!)^{2k+1}}\neq 1.$$

D'autre part

$$\rho(2)=\frac{\pi}{4}\neq 1.$$

Alors

$$\rho(n)\neq 1, \qquad \forall n=2,3,\dots$$

Les relations (8) et (10) nous donnent

$$P(A_1\cap\cdots\cap A_n)\neq P(A_1)\cdots P(A_n)$$

et par conséquent les événements $A_1,\dots,A_n$ sont dépendants.

Pour $n=2$, le résultat a été démontré par E. F. Schuster [2].

2. Dans ce point, nous nous occuperons de l'estimation de la probabilité $P(A_j)$ (9). Soit $X^{(j)}$ l'indicateur de l'événement A_j, c'est-à-dire la variable aléatoire qui prend les valeurs

$$x^{(j)}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad \omega\in A_j,\\ 0 & \text{si} \quad \omega\notin A_j,\end{cases} \tag{11}$$

où ω est un segment de longueur l.

On peut, donc, considérer la variable aléatoire n-dimensionnelle $(X^{(1)},\dots,X^{(n)})$ et soit $(X_i^{(1)},\dots,X_i^{(n)})$, $(i=1,\dots,N)$ un échantillon de variable aléatoire parente $(X^{(1)},\dots,X^{(n)})$. Notons $(x_i^{(1)},\dots,x_i^{(n)})$, $(i=1,\dots,N)$, une réalisation de l'échantillon, c'est-à-dire les résultat de N expériences indépendantes effectuées sur la variable aléatoire $(X^{(1)},\dots,X^{(n)})$.

On a, alors, le suivant estimateur pour la probabilité (9):

$$\hat{P}_n=\frac{1}{nN}\sum_{i=1}^{N}(X_i^{(1)}+\cdots+X_i^{(n)})=\frac{1}{nN}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}X_i^{(j)}.$$

Calculons la variance de cet estimateur. Nous avons

$$\begin{aligned}D^2(\hat{P}_n)&=\frac{1}{(nN)^2}\sum_{i=1}^{N}D^2\left(\sum_{j=1}^{n}X_i^{(j)}\right)=\frac{1}{(nN)^2}N\cdot D^2\left(\sum_{j=1}^{n}X^{(j)}\right)\\&=\frac{1}{n^2N}[n\,D^2(X^{(1)})+n(n-1)\operatorname{cov}(X^{(1)},X^{(2)})]\\&=\frac{1}{nN}[D^2(X^{(1)})+(n-1)\operatorname{cov}(X^{(1)},X^{(2)})].\end{aligned} \tag{12}$$

Compte tenu de (11), on a

$$E(X^{(1)}) = P(A_1), \qquad E([X^{(1)}]^2) = P(A_1),$$

donc

$$D^2(X^{(1)}) = P(A_1)[1 - P(A_1)]. \tag{13}$$

Pareillement

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X^{(1)}, X^{(2)}) &= E(X^{(1)}, X^{(2)}) - E(X^{(1)}) E(X^{(2)}) = P(A_1 \cap A_2) - P(A_1) P(A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2) - P(A_1) P(A_2) \\ &= 2 P(A_1) - [P(A_1)]^2 - P(A_1 \cup A_2). \end{aligned}$$

Alors (12) devient

$$D^2(\hat{P}_n) = \frac{1}{nN} \left[(2n-1) P(A_1) - n [P(A_1)]^2 - (n-1) P(A_1 \cup A_2)\right]. \tag{12'}$$

De (4) on a

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) = 1 &- \frac{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}} \int_0^{\pi/2} \cdots \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos\varphi_1\right)\left(1 - \frac{1}{2} \sin\varphi_1 \cos\varphi_2\right) \sin^{n-2}\varphi_1 \\ &\times \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-1} \\ &= 1 - \frac{2^{n-2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{3/2} (n-2)!} \left[\left(\pi + \frac{1}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) - \frac{2}{n-1} \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

En remplaçant (9) et (14) en (12′) on obtient

$$D^2(\hat{P}_n) = \frac{1}{nN} \theta_n, \tag{15}$$

avec

$$\begin{aligned} \theta_n = (2n-1) &\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sqrt{\pi}} - n \frac{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2}{(n-1)^2 \left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^2 \pi} - n + 1 \\ &+ \frac{2^{n-2} (n-1) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{3/2} (n-2)!} \left[\left(\pi + \frac{1}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) - \frac{2\sqrt{\pi}}{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Considérons, maintenant, l'échantillon $X_1^{(1)}, \ldots, X_M^{(1)}$, de variable aléatoire parente $X^{(1)}$ et soit $x_1, \ldots, x_M$ une réalisation de l'échantillon, c'est-à-dire les résultats de M expériences indépendantes effectuées sur la variable aléatoire $X^{(1)}$.

On a, alors, le suivant estimateur pour la probabilité (9):

$$\hat{P}_1 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} X_i^{(1)}.$$

La relation (13) nous donne

$$D^2(\hat{P}_1) = \frac{1}{M^2} \cdot M \cdot D^2(X^{(1)})$$

$$= \frac{1}{M} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\right]. \tag{16}$$

En écrivant l'égalité des variances (15) et (16) nous obtenons

$$M = \sigma(n)\, n\, N,$$

avec

$$\sigma(n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left[(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi} - \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]}{(n-1)^2\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^2 \pi\, \theta_n}.$$

Donc, N expériences indépendantes effectuées sur un réseau formé par hypercubes de côtés $2l$ nous fournissent la même information que $\sigma(n)\, n\, N$ expériences indépendantes effectuées sur un réseau formé par des hyperplans parallèles aux hyperplans de coordonnées et de distances respectives égales à $2l$.
Pour $n = 2$, Schuster à trouvé

$$\sigma(2) = \frac{4(\pi - 1)}{5\pi - 8} \cong 1{,}1136.$$

Pour $n = 3$ et $n = 4$ on a respectivement

$$\sigma(3) = \frac{9\pi}{3\pi + 16} \cong 1{,}1120, \qquad \sigma(4) = \frac{16(3\pi - 2)}{75\pi - 128} \cong 1{,}1038.$$

Nous faisons la suivante conjecture:

$$\sigma(n) > \sigma(n+1), \qquad \forall n = 2, 3, \ldots; \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma(n) = 1.$$

Marius I. Stoka, Istituto di Geometria dell'Università di Torino

BIBLIOGRAPHIE

1 S.S. Chern et Ch.T. Yien: Sulla formula principale cinematica dello spazio ad n dimensioni. Boll. U.M.I. (II) *2*, 434–437 (1940).
2 E.F. Schuster: Buffon's needle experiment. Am. Math. Monthly *81*, 26–29 (1974).
3 M.I. Stoka: Une extension du problème de l'aiguille de Buffon dans l'espace euclidien R_n. Boll. U.M.I. (IV) *10*, 386–389 (1974).

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/83/010004-08\$1.50 + 0.20/0

Zur mittleren Anzahl von Schritten beim euklidischen Algorithmus

1. Einleitung

Für jedes Paar a, b natürlicher Zahlen liefert der übliche euklidische Algorithmus durch sukzessive Division eine Folge von Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= q_1 b + r_1 \\ b &= q_2 r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ r_{k-1} &= q_{k+1} r_k + r_{k+1} \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

mit $a \geq r_1 > r_2 > \cdots > r_n = 0$. Der grösste gemeinsame Teiler von a und b ist dann r_{n-1} (bzw. b für $n = 1$). Wir bezeichnen die Anzahl n der Gleichungen bzw. Divisionsschritte bei der obigen Form des Algorithmus mit $T(a,b)$. $T(a,b)$ ist bekanntlich gleichfalls die Länge des Kettenbruches $[q_1, q_2, \ldots, q_n]$ für den Bruch a/b, so dass die mittlere Schrittzahl des euklidischen Algorithmus für *alle* a, b mit $1 \leq a, b \leq \mathbf{N}$, also

$$T_N = \frac{1}{N^2} \sum_{a=1}^{N} \sum_{b=1}^{N} T(a,b) \tag{2}$$

auch die mittlere Länge dieser Kettenbruchdarstellungen der (gemeinen) Brüche a/b mit $1 \leq a, b \leq \mathbf{N}$ darstellt.

Beide Mittelwerte sind offensichtlich zahlentheoretisch interessante Grössen, die mittlere Schrittzahl des euklidischen Algorithmus sogar aus praktischen Gründen: Ich selbst bin auf die Frage nach T_N gestossen bei der Vorbereitung von Schulversuchen zur Wiedereinführung von gewissen Formen des euklidischen Algorithmus, als Hilfe beim Kürzen, in den Mathematikunterricht der allgemeinbildenden Schulen. Das Interesse an dieser Fragestellung wird gleichfalls durch die Literatur der letzten Jahre [2–6] belegt. Der Beweis unseres Satzes beruht ganz wesentlich auf einem Satz von Dixon von 1970.