

# Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **37 (1982)**

Heft 1

PDF erstellt am: **25.04.2024**

## Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Anmerkung: Die Autoren danken Herrn Professor L. Fejes Tóth für die vielen interessanten Diskussionen während seines Aufenthaltes in Salzburg und für sein Interesse am Fortgang dieser Arbeit.

F. Österreicher und J. Linhart, Universität Salzburg

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 L. Fejes Tóth: Scheibenpackungen konstanter Nachbarnzahl. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20, 375–381 (1969).
- 2 J. Linhart: Über einige Vermutungen von L. Fejes Tóth. Acta Math. Sci. Hung. 24/1–2, 199–201 (1973).
- 3 F. Österreicher und W. Rohm: Über das Legen kongruenter Stäbchen, so dass jedes genau drei Nachbarn besitzt. Arbeitsber. Math. Inst. Univ. Salzburg 4, 69–86 (1979).
- 4 A.B. Owens: On the planarity of regular incidence sequences. J. Combinat. Theory (B) 11, 201–212 (1971).
- 5 E.F. Schmeichel and S.L. Hakimi: On planar graphical degree sequences. Siam J. appl. Math. 32, 598–609 (1977).
- 6 G. Wegner: Bewegungsstabile Packungen konstanter Nachbarnzahl. Studia Sci. Math. Hung. 6, 431–438 (1971).
- 7 P. Manca: Generating all planar graphs of degree four. J. Graph Theory 3/4, 357–363 (1979).
- 8 F. Österreicher: Notizen zur Erzeugung von 5-regulären ebenen Graphen. Unveröffentlichtes Manuskript.

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/82/010005-12 \$1.50+0.20/0

## Kleine Mitteilungen

### Über den Rang gewisser zirkulanter Matrizen (zu Problem 764A)

Es sei stets  $p$  eine Primzahl  $\neq 2$  und  $C_p$  die zirkulante Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/(p-2) & 1/(p-1) \\ 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(p-1) & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1/(p-1) & 1 & \dots & 1/(p-3) & 1/(p-2) \end{pmatrix}.$$

In [4] stellte Spindelböck die Aufgabe, den Rang von  $C_p$  in  $\mathbb{Z}_p$ , dem Primkörper der Charakteristik  $p$ , zu ermitteln. Hier sollen nun einige Aussagen über den fraglichen Rang abgeleitet werden; dabei wird sich zeigen, dass wir im Augenblick weit davon entfernt sind, etwa eine handliche Formel angeben zu können, die  $\text{Rang}(C_p)$  für jedes vorgegebene  $p$  liefert.

Sind  $v_1, \dots, v_{p-1}$  die Nullstellen von  $X^{p-1} - 1$  in  $\mathbf{Z}_p$ , ist  $V_p$  die Vandermondematrix  $(v_j^{i-1})_{1 \leq i, j < p}$  und wird schliesslich

$$f_p(X) := \sum_{k=1}^{p-1} X^{k-1}/k \quad (1)$$

gesetzt, so ist

$$C_p V_p = \begin{pmatrix} f_p(v_1) & \dots & f_p(v_{p-1}) \\ v_1^{-1} f_p(v_1) & \dots & v_{p-1}^{-1} f_p(v_{p-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{2-p} f_p(v_1) & \dots & v_{p-1}^{2-p} f_p(v_{p-1}) \end{pmatrix}.$$

Nach dem kleinen Fermatschen Satz sind die  $v_1, \dots, v_{p-1}$  genau die von Null verschiedenen Elemente von  $\mathbf{Z}_p$ . Da  $V_p$  regulär ist, gilt also für den gesuchten Rang

$$\text{Rang}(C_p) = p - 1 - \text{card}\{w \in \mathbf{Z}_p \mid f_p(w) = 0\}. \quad (2)$$

Die Lösung des Problems in [4] ist also gleichbedeutend mit der Bestimmung der genauen Anzahl der in  $\mathbf{Z}_p$  gelegenen Nullstellen von  $f_p$  für jede Primzahl  $p \geq 3$ .

**Proposition 1.**  $f_p$  hat in  $\mathbf{Z}_p$  die einfache Nullstelle 1; jede von 1 verschiedene, in  $\mathbf{Z}_p$  gelegene Nullstelle ist genau zweifach. Daher gelten die Ungleichungen

$$1 \leq \text{card}\{w \in \mathbf{Z}_p \mid f_p(w) = 0\} \leq (p-1)/2 \quad (3)$$

bzw.

$$(p-1)/2 \leq \text{Rang}(C_p) \leq p-2, \quad (4)$$

und die Schranken sind scharf.

Beweis: Zuerst betrachten wir die aus (1) folgenden Identitäten

$$X f_p'(X) + f_p(X) = (X f_p(X))' = \sum_{k=1}^{p-1} X^{k-1} = (X^{p-1} - 1)/(X - 1) = \prod_{k=2}^{p-1} (X - k) \quad (5)$$

bzw.

$$X f_p''(X) + 2 f_p'(X) = \sum_{k=2}^{p-1} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^{p-1} (X - j). \quad (6)$$

Nun ist  $f_p(1) = 0$  nach dem Satz von Lagrange, vgl. etwa [2]; gemäss (5) ist 1 jedoch eine einfache Nullstelle. Sei nun  $w \in \mathbf{Z}_p$ ,  $w \neq 1$  eine Nullstelle von  $f_p$ ; sicher ist  $w \neq 0$ ,

und aus (5) bzw. (6) folgt  $f'_p(w) = 0$  bzw.  $f''_p(w) \neq 0$ . Damit ist (3) und wegen (2) auch (4) klar. Dass die in (3) gegebene Abschätzung scharf ist, zeigt die erste Zeile der nachstehenden Tabelle.

| Primzahl $p$ | Grad des Polynoms<br>$g_p(X) := f_p(X)/(X-1)$ | Anzahl der Nullstellen<br>von $g_p$ in $\mathbf{Z}_p$ | Lage der Nullstellen<br>von $g_p$ |
|--------------|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| 3            | 0                                             | 0                                                     | –                                 |
| 5            | 2                                             | 0                                                     | –                                 |
| 7            | 4                                             | 2                                                     | 3 und 5                           |
| 11           | 8                                             | 0                                                     | –                                 |
| 13           | 10                                            | 2                                                     | 4 und 10                          |
| 17           | 14                                            | 0                                                     | –                                 |
| 19           | 16                                            | 2                                                     | 8 und 12                          |
| 23           | 20                                            | 0                                                     | –                                 |
| 29           | 26                                            | 0                                                     | –                                 |
| 31           | 28                                            | 2                                                     | 6 und 26                          |
| 37           | 34                                            | 2                                                     | 11 und 27                         |

Wir entnehmen weiter der Tabelle, dass das Polynom

$$g_p(X) := f_p(X)/(X-1) \in \mathbf{Z}_p[X]$$

für die aufgeführten  $p \equiv 1 \pmod{6}$  genau zwei verschiedene Nullstellen in  $\mathbf{Z}_p$  hat. Wir zeigen später, dass  $g_p$  für jedes  $p \equiv 1 \pmod{6}$  in  $\mathbf{Z}_p$  mindestens zwei Nullstellen hat, so dass die untere Schranke in (3) für diese  $p$  auf 3 angehoben und somit die obere Schranke in (4) für dieselben  $p$  auf  $p-4$  herabgedrückt werden kann.

**Proposition 2.** Für  $w \in \mathbf{Z}_p \setminus \{0\}$  ist

$$wf_p(w) = -f_p(w^{-1}); \quad (7)$$

$w \in \mathbf{Z}_p$  ist also Nullstelle von  $f_p$  genau dann, wenn dies für  $w^{-1}$  zutrifft.

Beweis: Nach dem kleinen Fermatschen Satz ist nämlich

$$wf_p(w) = \sum_{k=1}^{p-1} w^k/k = \sum_{k=1}^{p-1} w^{k-p+1}/(k-p) = -\sum_{j=1}^{p-1} (w^{-1})^{j-1}/j = -f_p(w^{-1}).$$

Hat man also eine von 1 und  $-1$  verschiedene Nullstelle  $w \in \mathbf{Z}_p$  von  $f_p$ , so findet man sofort  $w^{-1} \neq w$  als weitere Nullstelle von  $f_p$ .

**Proposition 3.** In  $\mathbf{Z}_p$  gelten die Gleichungen<sup>1)</sup>

$$f_p(X) = (1 - X^p - (1 - X)^p) / pX \quad (8)$$

und also

$$(1 - X)f_p(1 - X) = Xf_p(X). \quad (9)$$

1) Man beachte, dass hier rechts jeder Koeffizient des Zählerpolynoms durch  $p$  teilbar ist.



Daher gilt für  $w \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0, 1\}$ :  $w$  ist Nullstelle von  $f_p$  genau dann, wenn dies für  $1-w$  zutrifft.

Beweis: Für  $k = 1, \dots, p-1$  schreiben wir  $y_k := \binom{p}{k}/p$  und haben also

$$k!y_k = (p-1) \cdots (p-k+1) \equiv (-1)^{k-1}(k-1)! \pmod{p}.$$

Dies liefert  $y_k \equiv (-1)^{k-1}/k \pmod{p}$  und daher modulo  $p^2$

$$(1-X)^p = 1 - X^p + p \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k y_k X^k \equiv 1 - X^p - p \sum_{k=1}^{p-1} X^k / k = 1 - X^p - p X f_p(X).$$

Damit ist (8) gezeigt; die restliche Behauptung ist dann klar.

Im Hinblick auf die Nullstellenaussagen der Propositionen 2 und 3 wird man sich natürlich für solche  $w \in \mathbb{Z}_p$  interessieren, die  $w^{-1} = 1-w$  erfüllen.

**Proposition 4.** Sei  $p \geq 5$ .  $X(1-X) = 1$  hat in  $\mathbb{Z}_p$  genau dann Wurzeln, und zwar zwei verschiedene, wenn  $p \equiv 1 \pmod{6}$  ist. Ist  $p \equiv 1 \pmod{6}$ , so sind diese tatsächlich Nullstellen von  $g_p$  und damit von  $f_p$ .

Beweis:  $w(w-1) = -1$  in  $\mathbb{Z}_p$  ist hier gleichbedeutend mit  $(2w-1)^2 \equiv -3 \pmod{p}$ . Nach dem quadratischen Reziprozitätsgesetz und seinen Ergänzungssätzen gilt bei  $p \geq 5$  für das Legendre-Symbol

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2} \left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right)$$

und dies ist 1 genau dann, wenn  $p \equiv 1 \pmod{3}$  ist, was mit  $p \equiv 1 \pmod{6}$  äquivalent ist. Sei nun  $p \equiv 1 \pmod{6}$  und  $w_0 \in \mathbb{Z}_p$  eine der beiden Lösungen von  $X(1-X) = 1$ . Sicher ist  $w_0 \neq 0, 1$  und also nach (9) und (7)

$$w_0 f_p(w_0) = (1-w_0) f_p(1-w_0) = (1-w_0) f_p(w_0^{-1}) = -w_0(1-w_0) f_p(w_0) = -f_p(w_0);$$

wegen  $w_0 \neq -1$  folgt hieraus  $f_p(w_0) = 0$ .

Das hier gefundene Ergebnis erklärt in unserer Tabelle das Auftreten zweier Nullstellen von  $g_p$  in  $\mathbb{Z}_p$  für die  $p \leq 37$ , die kongruent 1 modulo 6 sind. Wenn man aber aufgrund der Tabelle vermutet,  $g_p$  habe stets zwei bzw. keine Nullstelle, je nachdem ob  $p \equiv 1$  bzw.  $\not\equiv 1 \pmod{6}$  ist, so wird sich dies sogleich als unzutreffend erweisen.

Sei weiterhin  $p \geq 5$ . Dann sind  $2, (p+1)/2, p-1$  paarweise verschiedene Elemente von  $\mathbb{Z}_p$ , die überdies von 0 und 1 und [falls  $p \equiv 1 \pmod{6}$  ist] von den Wurzeln von  $X(1-X) = 1$  verschieden sind. Setzen wir

$$H_p := \{2, (p+1)/2, p-1\},$$

so gilt nach den Propositionen 2 und 3: Ist  $f_p(w) = 0$  für ein  $w \in H_p$ , so verschwindet

$f_p$  an jeder Stelle von  $H_p$ . Nach Proposition 3 ist dies aber mit dem Bestehen der Kongruenz

$$2^p \equiv 2 \pmod{p^2} \quad (10)$$

von Wieferich [6] gleichbedeutend, die von den Untersuchungen zur Fermatschen Vermutung über  $x^p + y^p = z^p$  her wohlbekannt ist, vgl. etwa [3]. Ob (10) unendlich viele Lösungen  $p$  besitzt, ist bis heute nicht sicher; das bisher beste Ergebnis stammt von Brillhart, Tonascia und Weinberger [1] und besagt, dass unterhalb  $3 \cdot 10^9$  alleine die Primzahlen 1093 und 3511 der Bedingung (10) genügen. Da beide Primzahlen kongruent 1 modulo 6 sind, haben nach Proposition 4 die  $g_{1093}$  bzw.  $g_{3511}$  wenigstens fünf Nullstellen in  $\mathbf{Z}_{1093}$  bzw.  $\mathbf{Z}_{3511}$ .

Lassen wir nun aus  $\mathbf{Z}_p$  die  $0, 1, 2, (p+1)/2, p-1$  und im Falle  $p \equiv 1 \pmod{6}$  noch die beiden Wurzeln von  $X(1-X)=1$  fort, so bleibt jedenfalls eine durch 6 teilbare Anzahl von Elementen übrig, die sich wie folgt auf lauter disjunkte Klassen zu je sechs Elementen verteilen: Ist  $w$  ein beliebiges übriggebliebenes Element, so ist nach den Propositionen 2 und 3 entweder jedes oder keines der folgenden, paarweise verschiedenen Elemente

$$w, \quad w^{-1}, \quad 1-w^{-1}, \quad w(w-1)^{-1}, \quad (1-w)^{-1}, \quad 1-w$$

von  $\mathbf{Z}_p$  Nullstelle von  $f_p$ . Fassen wir diese sechs Elemente zur Menge  $G_p(w)$  zusammen, so können wir schliesslich formulieren:

**Proposition 5.** *Ist  $p \equiv 1 \pmod{6}$  und  $w_0 \in \mathbf{Z}_p$  eine Wurzel von  $X(1-X)=1$ , so gibt es  $w_1, \dots, w_{(p-7)/6} \in \mathbf{Z}_p \setminus \{0, 1, w_0, w_0^{-1}, 2, 1/2, -1\}$  derart, dass die  $G_p(w_1), \dots, G_p(w_{(p-7)/6})$  paarweise disjunkt sind und die Zerlegung*

$$\mathbf{Z}_p \setminus \{0, 1, w_0, w_0^{-1}\} = H_p \cup G_p(w_1) \cup \dots \cup G_p(w_{(p-7)/6})$$

*die Eigenschaft besitzt, dass das Verschwinden von  $f_p$  an einer Stelle von  $G_p$  bzw.  $H_p$  sogleich das Verschwinden von  $f_p$  an jeder Stelle von  $G_p$  bzw.  $H_p$  impliziert. Ist  $p \equiv 5 \pmod{6}$ , so gibt es analog  $w_1, \dots, w_{(p-5)/6} \in \mathbf{Z}_p \setminus \{0, 1, 2, 1/2, -1\}$  derart, dass die Zerlegung*

$$\mathbf{Z}_p \setminus \{0, 1\} = H_p \cup G_p(w_1) \cup \dots \cup G_p(w_{(p-5)/6})$$

*die vorher aufgeführte Eigenschaft hat.*

Damit erschöpfen sich unsere Aussagen über die Nullstellenverteilung von  $f_p$  bei beliebigem  $p \geq 5$ . Wie oben schon erwähnt, kennen wir nur zwei  $p$ -Werte  $\equiv 1 \pmod{6}$ , für die die drei Elemente von  $H_p$  Nullstellen von  $f_p$  sind. Ist  $p > 7$ , so fällt jedenfalls  $3 \in \mathbf{Z}_p$  in ein  $G_p$ ; ob jedes der sechs Elemente dieses  $G_p$  tatsächlich Nullstelle von  $f_p$  ist oder keines, hängt nach Proposition 3 ab von der Frage, ob die Kongruenz

$$3^p \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2} \quad (11)$$

lösbar ist oder nicht. Hinsichtlich (11) sind unsere Kenntnisse jedoch genauso lückenhaft wie bezüglich (10).

Abschliessend erwähnen wir, dass die in (1) eingeführten Polynome  $f_p$  und ihre Nullstellen in  $\mathbb{Z}_p$  eine wichtige Rolle spielen bei vielen Untersuchungen zur Fermat-Vermutung im sog. «ersten Fall», wenn also keines der  $x, y, z$  durch  $p$  teilbar ist, vgl. etwa [3] und [5].

Peter Bundschuh, Mathematisches Institut der Universität Köln

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 J. Brillhart, J. Tonascia und P. Weinberger: On the Fermat Quotient. In: Computers in Number Theory, S. 213–222, New York 1971.
- 2 G.H. Hardy und E.M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers, 2. Aufl. Oxford 1945.
- 3 P. Ribenboim: 13 Lectures on Fermat's Last Theorem. New York, Heidelberg, Berlin 1979.
- 4 K. Spindelböck: Problem 764A. *El. Math.* 31, 44 (1976).
- 5 H.S. Vandiver: Note on Euler Number Criteria for the First Case of Fermat's Last Theorem. *Am. J. Math.* 62, 79–82 (1940).
- 6 A. Wieferich: Zum letzten Fermatschen Theorem. *J. reine angew. Math.* 136, 293–302 (1909).

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/82/010016-06 \$1.50 + 0.20/0

#### Eine räumliche Deutung der Vierseiteigenschaft von Bodenmiller

In der euklidischen Ebene  $\pi$  gilt der auf Bodenmiller ([6], S. 1003) zurückgehende

**Satz.** *Die Thaleskreise über den Gegeneckenpaaren eines Vierseits liegen in einem Kreisbüschel.*

Beweise dieses Satzes stammen u. a. von Schlämilch [3], Möbius [2], Chasles [1] und Study [5]. Für den hier gegebenen einfachen Beweis interpretieren wir Abb. 1 als

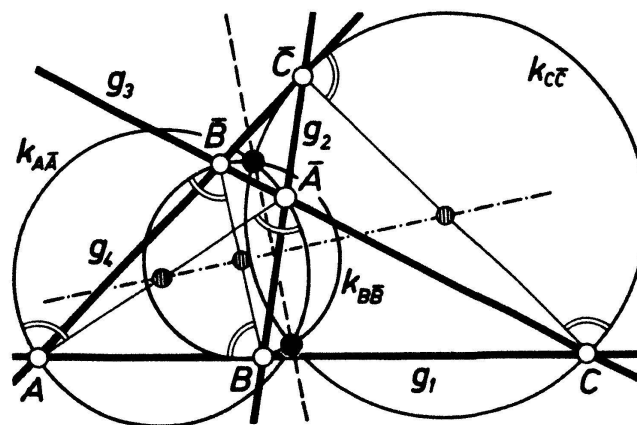


Abb. 1

Zentralriss eines räumlichen Objektes. Die mit  $X_u^c, Y_u^c, Z_u^c$  beschrifteten Diagonalecken des gegebenen Vierseits  $V = \{g_1, \dots, g_4\}$  werden als die Fluchtpunkte dreier Durchmesser einer Kugel  $\Phi$  aufgefasst. Die Durchmesserendpunkte  $X, \bar{X}, Y, \bar{Y}, Z, \bar{Z}$  sind Ecken eines  $\Phi$  eingeschriebenen Oktaeders mit sechs Paaren paralleler Kanten, die jeweils nach den mit  $A_u^c, \bar{A}_u^c, B_u^c, \bar{B}_u^c, C_u^c, \bar{C}_u^c$  beschrifteten Ecken von  $V$  fluchten (vgl. Abb. 2). Um die Lage des Augpunktes  $O$  der Zentralprojektion auf  $\pi$  zu ermitteln, koppeln wir zwei der Paare antipodischer Kugelpunkte, etwa  $X, \bar{X}$  und  $Y, \bar{Y}$  zu einem Rechteck. Die Fluchtpunkte  $A_u^c, \bar{A}_u^c$  orthogonaler Seiten dieses Rechtecks müssen dann aus dem Augpunkt  $O$  unter rechtem Winkel gesehen werden; somit liegt  $O$  auf der Thaleskugel  $\Psi_{A\bar{A}}$  über dem Gegeneckenpaar  $A_u^c, \bar{A}_u^c$  von  $V$  (vgl. Abb. 2). Koppelt man das verbleibende Paar von Durchmesserendpunkten  $Z$

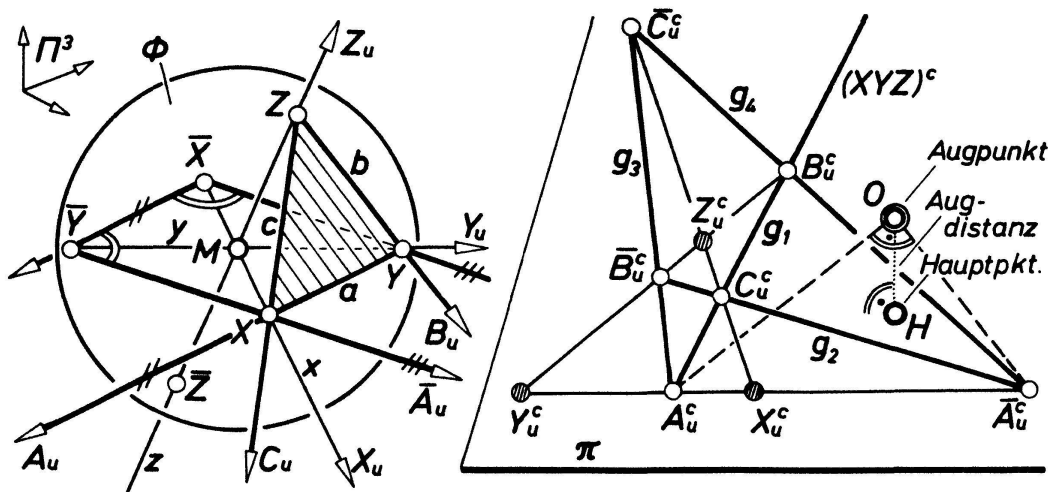


Abb. 2

und  $\bar{Z}$  etwa mit  $Y$  und  $\bar{Y}$ , so liefert obige Überlegung eine weitere Thaleskugel  $\Psi_{B\bar{B}}$  über  $B_u^c, \bar{B}_u^c$  durch  $O$ . Das dritte mögliche Rechteck  $\{Z, X, \bar{Z}, \bar{X}\}$  ist nun durch die vorher verwendeten bereits mitbestimmt und kann daher keine weitere, von den ersten beiden unabhängige Bedingung für  $O$  liefern. Damit liegt die aus  $\{Z, X, \bar{Z}, \bar{X}\}$  abgeleitete Thaleskugel  $\Psi_{C\bar{C}}$  über dem Fluchtpunktepaar  $C_u^c, \bar{C}_u^c$  in dem von  $\Psi_{A\bar{A}}$  und  $\Psi_{B\bar{B}}$  aufgespannten Kugelbüschel. Die Spurkreise von  $\Psi_{A\bar{A}}, \Psi_{B\bar{B}}, \Psi_{C\bar{C}}$  in  $\pi$  sind aber die Thaleskreise  $k_{A\bar{A}}, k_{B\bar{B}}, k_{C\bar{C}}$  über den Gegeneckenpaaren des Angabevierseits  $V$  und gehören somit, wie behauptet, einem Kreisbüschel an.

Für den Augpunkt  $O$  gelten die Bedingungen  $O \in \Psi_{A\bar{A}} \cap \Psi_{B\bar{B}}$  und  $O \in \Psi_{C\bar{C}}$ . Mit jedem Punkt  $O$  ist auch der zu  $\pi$  symmetrische Punkt ein möglicher Augpunkt für die gesuchte Zentralprojektion, so dass unabhängig von der Realität von  $O$  die Normalprojektion  $H$  von  $O$  auf  $\pi$  stets reell ausfällt. Der Punkt  $H$  heisst «Hauptpunkt» der Zentralprojektion aus  $O$  auf  $\pi$  und liegt auf der Spur  $s$  der zu  $\pi$  normalen Chordalebene von  $\Psi_{A\bar{A}}$  und  $\Psi_{B\bar{B}}$ , also auf der Chordalen der Spurkreise  $k_{A\bar{A}}, k_{B\bar{B}}$  von  $\Psi_{A\bar{A}}, \Psi_{B\bar{B}}$ . Aus dem Bodenmillerschen Satz folgt somit, dass  $H$  nur bis auf (beliebige) Wahl auf  $s$  festgelegt ist.

Bei einer Zentralprojektion mit dem Hauptpunkt  $H$  sind nun die Fluchtelemente  $A_u^c$  und  $\alpha_u^c$  einer Geraden  $a$  und einer zu ihr normalen Ebene  $a$  notwendig so beschaffen, dass  $HA_u^c \perp \alpha_u^c$  gilt. Gibt man also  $H$  auf  $s$  vor, so ist die Fluchtspur  $\alpha_u^c$  not-

wendig die Normale auf  $HA_u^c$  durch  $\bar{A}_u^c$ . Wählen wir  $H$  insbesondere so, dass  $a_u^c$  in  $\bar{A}_u^c \bar{B}_u^c$  fällt (vgl. Abb. 3), dann muss wegen  $H \in s$  auch  $H \bar{B}_u^c \perp A_u^c B_u^c$  gelten und  $H$

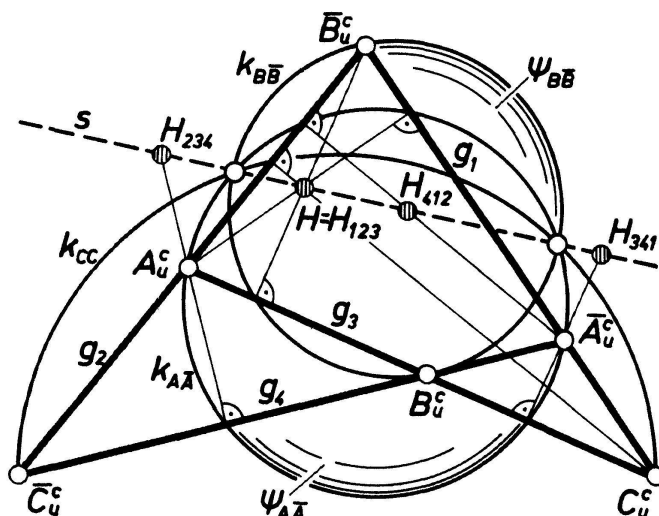


Abb. 3

ist der Höhenschnittpunkt  $H_{123}$  des Dreiecks  $\{A_u^c, B_u^c, C_u^c\} = \{g_1, g_2, g_3\}$ . Nebenbei ergibt sich, dass  $C_u^c, \bar{C}_u^c$  wegen  $\bar{C}_u^c \in A_u^c \bar{B}_u^c = g_2$  und  $g_2 \perp HC_u^c$  ebenfalls Fluchtpunkte orthogonaler Richtungen sind und ein eventuell reeller<sup>1)</sup>, zu  $H$  gehöriger Augpunkt  $O$  auch auf der Thaleskugel  $\Psi_{CC}$  liegt. Mit gleicher Schlussweise lässt sich auch für die übrigen Teildreiseite von  $V$  nachweisen, dass deren Höhenschnittpunkte mit  $s$  inzidieren. Wir haben damit folgenden Satz bewiesen (vgl. [4], S. 223, und [6], S. 1003):

*Die Höhenschnittpunkte der vier Teildreiseite  $\{g_i, g_j, g_k\}$  ( $i, j, k$  pw.  $\neq, \in 1, \dots, 4$ ) eines Vierseits  $\{g_1, \dots, g_4\}$  der euklidischen Ebene sind kollinear mit der gemeinsamen Chordalen der Bodenmillerschen Thaleskreise dieses Vierseits.*

G. Weiss, Technische Universität Wien, A

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 M. Chasles: *Traité de Géométrie supérieure*. Gauthier-Villars, Paris 1880.
- 2 A.F. Möbius: Zwei rein geometrische Beweise des Bodenmillerschen Satzes. *Verh. K. Sächs. Ges. Wiss., math.-phys. Kl.* 6, 87–91 (1854).
- 3 O. Schlömilch: Über das vollständige Viereck. *Verh. K. Sächs. Ges. Wiss., math.-phys. Kl.* 6, 4–13 (1854).
- 4 J. Steiner: *Gesammelte Werke*, 1. Bd. Hrsg. K. Weierstrass. Reimer, Berlin 1881.
- 5 E. Study: Elementare Beweise einiger geometrischer Sätze. *J. Math.* 94, 233–236 (1883).
- 6 M. Zacharias: *Elementargeometrie*. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften III.1.2. Teubner, Leipzig 1914, 1931.

1) Hiefür ist bekanntlich hinreichend, dass das Teildreiseit  $\{g_1, g_2, g_3\}$  spitzwinklig ist.