

Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **36 (1981)**

Heft 2

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

<http://www.e-periodica.ch>

- 16 E. Lanckau: Eine einheitliche Darstellung der Lösungen der Tricomischen Gleichung. *Z. angew. Math. Mech.* 42, 180–186 (1962).
- 17 V.E. Meister, N. Weck und W.L. Wendland (Hrsg.): *Function Theoretic Methods for Partial Differential Equations*. Berlin 1976.
- 18 P.F. Neményi: Recent Developments in Inverse and Semi-inverse Methods in the Mechanics of Continua. *Adv. appl. Mech.* 2, 123–151 (1951).
- 19 S. Ruscheweyh: Geometrische Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung $(1 - z\bar{z})^2 w_{zz} - n(n+1)w = 0$. *J. reine angew. Math.* 270, 143–157 (1974).
- 20 G.N. Watson: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2. Aufl. Cambridge 1966.

Kleine Mitteilungen

Bemerkungen über Zulässigkeitsmengen vollständig additiver Funktionen

Eine zahlentheoretische Funktion $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ heisst vollständig additiv, wenn für alle natürlichen Zahlen n und m $f(nm) = f(n) + f(m)$ gilt. Nach Kátaí [3] nennt man eine Menge A natürlicher Zahlen Eindeutigkeitsmenge vollständig additiver Funktionen (E -Menge), wenn für jede vollständig additive Funktion $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ aus $f(A) = \{0\}$ die Gleichung $f(\mathbf{N}) = \{0\}$ folgt. Verschiedene Autoren [1–5] haben allgemeine Charakterisierungen und spezielle Beispiele für E -Mengen gegeben. Insbesondere hat die Menge P der Primzahlen diese Eigenschaft. Im allgemeinen können aber die Werte einer vollständig additiven Funktion f auf einer E -Menge nicht beliebig vorgeschrieben werden. Mengen, die dies zulassen, und solche, die zugleich auch E -Mengen sind, werden im folgenden charakterisiert.

Definition. Eine Menge B natürlicher Zahlen heisst zulässig oder Zulässigkeitsmenge (kurz Z -Menge), falls sich jede Funktion $f: B \rightarrow \mathbf{C}$ so auf \mathbf{N} fortsetzen lässt, dass die Fortsetzung $\tilde{f}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ vollständig additiv ist.

Satz 1. Eine Menge $B \subset \mathbf{N}$ ist genau dann Z -Menge, wenn sich die Zahl 1 «nicht» in der Form

$$1 = b_1^{r_1} \cdot \dots \cdot b_k^{r_k} \tag{1}$$

schreiben lässt, wobei die Zahlen k , b_i und r_i die Bedingungen $A: k \in \mathbf{N}$, $b_1, \dots, b_k \in B$; $b_i \neq 1$; $r_1, \dots, r_k \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ erfüllen.

Beweis:

1. Angenommen die Zahl 1 lässt sich in der Form (1) schreiben. Betrachte die Funktion $f: B \rightarrow \mathbf{C}$ zu

$$f(n) := \begin{cases} 1 & n = b_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

f lässt sich nicht vollständig additiv fortsetzen, denn für die Fortsetzung \tilde{f} müsste gelten:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(1) &= \tilde{f}(b_1^{r_1} \cdot \dots \cdot b_k^{r_k}) = r_1 \tilde{f}(b_1) + \dots + r_k \tilde{f}(b_k) \\ &= r_1 \cdot 1 + 0 + \dots + 0 = r_1 \neq 0.\end{aligned}$$

Im Widerspruch zur Tatsache, dass für jede vollständig additive Funktion f stets $f(1) = 0$ gilt.

2. Sei B eine Teilmenge von \mathbf{N} , durch die 1 nicht in der Form (1) geschrieben werden kann. Sei ferner $f: B \rightarrow \mathbf{C}$ eine Funktion. Dann ist zu zeigen, dass zu f eine vollständig additive Fortsetzung $\tilde{f}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ existiert.

Betrachte den Vektorraum V , der von den Zahlen $\log p$ mit $p \in P$ über dem Körper der rationalen Zahlen aufgespannt wird. Da die Zahl 1 sich nicht in der Form (1) schreiben lässt, sind in V die Vektoren $\log b$ mit $b \in B$ linear unabhängig. Nach entsprechenden Sätzen aus der linearen Algebra lässt sich also die Menge $C' = \{\log b \mid b \in B\}$, falls sie nicht schon Basis von V ist, durch Hinzunahme einer Menge C'' geeigneter, linear unabhängiger Vektoren zu einer Basis C von V ergänzen. Bezüglich dieser Basis ist nun jeder Vektor $\log x \in V$ eindeutig darstellbar:

$$\log x = r_1 \log c_1 + \dots + r_s \log c_s.$$

Sei nun $\varphi: V \rightarrow \mathbf{C}$ die lineare Abbildung zu

$$\varphi(\log c) = \begin{cases} f(c) & \log c \in C' \\ 0 & \log c \in C'' \end{cases}$$

Dann lässt sich die Funktion $f: B \rightarrow \mathbf{C}$, wie folgt, zu einer vollständig additiven Funktion $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ ergänzen:

$$f(n) := \varphi(\log n).$$

Denn dann gilt:

1. $f(nm) = \varphi(\log nm)$,
 $= \varphi(\log n + \log m)$,
 $= \varphi(\log n) + \varphi(\log m)$,
 $= \tilde{f}(n) + \tilde{f}(m).$
2. Für $b \in B$, also $\log b \in C'$: $\tilde{f}(b) = \varphi(\log b) = f(b)$ q. e. d.

Satz 2. Eine Menge $B \subset \mathbf{N}$ ist genau dann Z -Menge, wenn sich jede natürliche Zahl n auf höchstens eine Weise in der Form

$$n = b_1^{r_1} \cdot \dots \cdot b_k^{r_k} \tag{2}$$

schreiben lässt, wobei die Zahlen k, b_i und r_i die Bedingungen A' : $k \in \mathbf{N}$; $b_1, \dots, b_k \in B$; $1 < b_1 < \dots < b_k$; $r_1, \dots, r_k \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ erfüllen.

Beweis: Lässt sich die Zahl 1 in der Form (1) schreiben, dann gibt es für jedes $b \in B$ zwei Darstellungen der Form (2), nämlich

$$b = b \quad \text{und} \quad b = b \cdot 1 = b \cdot b_1^{r_1} \cdot \dots \cdot b_k^{r_k}.$$

Lässt sich umgekehrt irgendein $n \in \mathbb{N}$ auf zwei Weisen in der Form (2) schreiben, also

$$n = b_1^{r_1} \cdot \dots \cdot b_k^{r_k} \quad \text{und} \quad n = c_1^{s_1} \cdot \dots \cdot c_l^{s_l} \quad (k \leq l),$$

dann hat die Zahl 1 – nach dem Zusammenfassen möglicherweise gleicher b_i und c_j ($1 \leq i, j \leq k$) – die Darstellung

$$1 = n \cdot n^{-1} = d_1^{t_1} \cdot \dots \cdot d_l^{t_l},$$

wobei mindestens einer der Faktoren $d_i^{t_i}$ von 1 verschieden ist. Mit Satz 1 folgt die Behauptung von Satz 2 sofort.

Satz 3. Eine Menge $A \subset \mathbb{N}$ ist genau dann E-Menge (s.o.!) und Z-Menge (kurz EZ-Menge), wenn für jedes $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ genau eine Darstellung in der folgenden Form existiert:

$$n = b_1^{r_1} \cdot \dots \cdot b_k^{r_k},$$

wobei die Zahlen k, b_i und r_i die Bedingungen A' erfüllen.

Beweis: Satz von Wolke [5] und Satz 2.

Satz 3'. Eine Menge $A \subset \mathbb{N}$ ist genau EZ-Menge, wenn für jedes $p \in P$ mindestens eine Darstellung der Form (*) existiert und dies für die Zahl 1 nicht gilt:

$$p = b_1^{r_1} \cdot \dots \cdot b_k^{r_k}, \tag{*}$$

wobei die Zahlen k, b_i und r_i die Bedingungen A' erfüllen.

Beweis: Aus dem Satz von Wolke [5] folgt unmittelbar, dass eine Menge $A \subset \mathbb{N}$ genau dann E-Menge ist, wenn sich jedes $p \in P$ in der Form (*) darstellen lässt. Dies und Satz 1 ergeben die Behauptung.

Beispiele für EZ-Mengen

[Zugleich Beispiele für Basen von V (siehe Beweis von Satz 1), bei denen die Basisvektoren die Gestalt $\log x$ mit $x \in \mathbb{N}$ haben.]

1. $A = \{p_1^{a_1}; p_2^{a_2}; p_3^{a_3}; \dots\}$ mit $a_i \in \mathbb{N}$,
2. $A = \{p_1^{a_1}; p_1^{a_2} p_2^{a_3}; p_3^{a_4}; p_4^{a_5}; \dots\}$ mit $a_i \in \mathbb{N}$,

3. $A = \{p_1^{a_1}; p_1^{a_2} p_2^{a_3}; p_1^{a_4} p_2^{a_5} p_3^{a_6}; p_1^{a_7} p_2^{a_8} p_3^{a_9} p_4^{a_{10}}; \dots\}$, mit $a_j \in \mathbf{N}$,
 4. $A = \{p_1^{a_1} p_2^{a_2}; p_2^{a_3} p_3^{a_4}; p_1^{a_5} p_3^{a_6}; p_4^{a_7}; p_5^{a_8}; \dots\}$, mit $a_j \in \mathbf{N}$.

EZ-Menge der Form 1 sind in gewissem Sinn einzig, siehe Satz 5, doch zuerst ein Hilfssatz:

Satz 4. *Ist B eine EZ-Menge. Dann existiert zu jedem $b \in B$ mindestens eine Primzahl p , in deren Darstellung $p = b_1^{r_1} \cdot \dots \cdot b_k^{r_k}$ gemäss Satz 3' b auftritt, d.h. $b = b_i$ für ein i mit $1 \leq i \leq k$ gilt.*

Beweis: Angenommen die Behauptung sei falsch, b sei die Zahl, zu der es keine Primzahl mit der behaupteten Eigenschaft gibt. Dann hat b zwei Darstellungen bezüglich B , nämlich 1. $b = b$ und 2. die durch die Primzahldarstellung von $b = p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}$ vermittelte, die b nicht enthält. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass B Z-Menge ist (siehe Satz 2!).

Satz 5. Mengen der Form

$$A = \{p_1^{a_1}; p_2^{a_2}; p_3^{a_3}; \dots\} \quad (a_i \in \mathbf{N})$$

sind die einzigen EZ-Mengen, deren Elemente paarweise teilerfremd sind.

Beweis: Sei B eine EZ-Menge, deren Elemente teilerfremd sind, sei $b \in B$ und p eine der nach Satz 4 existierenden Primzahlen, in deren Darstellung $p = b_1^{r_1} \cdot \dots \cdot b_k^{r_k}$ gemäss Satz 3 b auftritt. Nach Voraussetzung gilt für $i \neq j$ $(b_i, b_j) = 1$, also folgt:
 $p = b^r$ mit $r \in \mathbf{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow b = p^m$ mit $m \in \mathbf{N}$, da $b \in B$ und $B \subset \mathbf{N}$ gilt.

Thomas Jahnke, Gesamthochschule Siegen, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 P.D.T.A. Elliott: A conjecture of Kátai. Acta Arith. 26, 11–20 (1974).
- 2 K.-H. Indlekofer: On sets characterizing additive arithmetical functions. Math. Z. 146, 285–290 (1976).
- 3 I. Kátai: On sets characterizing number-theoretical functions. Acta Arith. 13, 315–320 (1968).
- 4 I. Kátai: On sets characterizing number-theoretical functions (II). Acta Arith. 16, 1–4 (1968).
- 5 D. Wolke: Bemerkungen über Eindeutigkeitsmengen additiver Funktionen. El. Math. 33/1 (1978).

Aufgaben

Aufgabe 837. Es seien G_1, G_2 zwei Graphen mit je n Ecken x_i bzw. y_i ($i = 1, \dots, n$) und e_n Kanten. Für die Grade (Valenzen) $\rho(x_i)$ bzw. $\rho(y_i)$ der Ecken gelte $\rho(x_i) \neq \rho(y_j)$ ($1 \leq i, j \leq n$). Man bestimme $\max e_n$. P. Erdős

Solution: By considering the complement of the graphs $G_i, i = 1, 2$, one gets the equivalent problem of determining the minimum value of e_n .