Aufgaben

$$-\frac{f'''(0)}{2\cdot 3\,(p-1)!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(p-3)(p-2)(p-1)}\equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} p^2).$$

L. Kuipers, Mollens

Aufgaben

Aufgabe 822. Es sei $a\equiv 2\,(\operatorname{mod} 3)$ and $a+1$ genau durch $3^s\,(s\geqslant 1)$ teilbar. Man bestimme für beliebiges $k\in\mathbf{N}_0$ die Ordnung der Restklasse von a in der primen Restklassengruppe $\operatorname{mod} 3^{s+k}$. L. Kuipers, Mollens

Lösung: Es ist die kleinste der natürlichen Zahlen m gesucht, für die

$$a^m\equiv 1\,(\operatorname{mod} 3^{s+k})$$

gilt. Bezeichnen wir sie mit $b(k)$, so ist sicher $b(k)$ ein Teiler von $\varphi(3^{s+k})=2\cdot 3^{s-1+k}$. Wäre $b(k)$ ungerade, so ergäbe sich aus $a\equiv -1\,(\operatorname{mod} 3)$ der Widerspruch

$$1\equiv a^{b(k)}\equiv -1\,(\operatorname{mod} 3).$$

Also hat $b(k)$ die Form

$$b(k)=2\cdot 3^{c(k)} \quad \text{mit} \quad c(k)\geqslant 0.$$

Schreibt man nun

$$a=-1+3^s u \quad \text{mit} \quad 3\nmid u.$$

so behaupten wir, dass für jedes $k\geqslant 0$

$$a^{2\cdot 3^k}=1-2u\cdot 3^{s+k}+v(k)\cdot 3^{s+k+1} \quad \text{mit} \quad v(k)\in\mathbf{Z} \qquad (*)$$

gilt. Für $k=0$ ist dies evident; wird $(*)$ für ein $k\geqslant 0$ als richtig angenommen, so bestätigt man ihre Gültigkeit für $k+1$ durch Erheben in die dritte Potenz und Berechnung der wesentlichen Summanden rechts. Aus $(*)$ liest man unmittelbar $c(k)\leqslant k$ für alle $k\geqslant 0$ ab. Wir zeigen nun $c(k)=k$ für alle $k\geqslant 0$ und haben damit die Aufgabe gelöst. Aus

$$a^{2\cdot 3^{c(k)}}=1+A\cdot 3^{s+k} \quad \text{mit} \quad A\in\mathbf{Z}$$

folgt

$$a^{2\cdot 3^k}=(1+A\cdot 3^{s+k})^{3^{k-c(k)}}=1+B\cdot 3^{s+2k-c(k)} \quad \text{mit} \quad B\in\mathbf{Z}.$$

Durch Vergleich mit ($*$) ergibt sich wegen $3 \nmid u: k \leqslant c(k)$.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Eine weitere Lösung sandte J. Binz (Bolligen).

Aufgabe 823. $E=\{0,1,\ldots,m-1\}$ sei die Eckenmenge eines regulären m-Ecks mit $m=3^k n$ Ecken $(k \geqslant 1,(n,3)=1)$ und $D=\{0,a,b\}$ mit $0<a<b<m$ ein ausgewähltes Dreieck. Für welche a,b ist E als disjunkte Vereinigung von $3^{k-1}\,n$ Drehbildern von D darstellbar?

Beispiel: $E=\{0,1,\ldots,11\}=\{0,5,7\} \cup \{3,8,10\} \cup \{6,11,1\} \cup \{9,2,4\}$.

J. Binz, Bolligen

Lösung des Aufgabenstellers: Es wird behauptet: Genau dann existieren $r=3^{k-1}n$ Drehungen $\rho_0,\rho_1,\ldots,\rho_{r-1}$, derart dass $E=\sum_{\nu=0}^{r-1}\rho_\nu D$, wenn es ein t gibt mit $0 \leqslant t \leqslant k-1$ und $(a,3^k)=(b,3^k)=(b-a,3^k)=3^t$.

Beweis: a) Die Bedingungen sind hinreichend: Wir fassen E als vollständiges Restsystem mod m auf. Ist ρ die Drehung um $2\pi/m$, so sind $\rho^{c(s,j)}$ mit $c(s,j)=s \cdot 3^{t+1}+j$ $(s=0,1,\ldots,n \cdot 3^{k-t-1}-1;\ j=0,1,\ldots,3^t-1)$ r Drehungen mit
$E=\sum_{s=0}^{n \cdot 3^{k-t-1}-1}\sum_{j=0}^{3^t-1}\rho^{c(s,j)}D$.
Die Punkte $\rho^{c(s,0)}0$ durchlaufen nämlich alle Reste von E, die in der Restklasse 0 mod 3^{t+1} liegen. Da a und b nach Voraussetzung in je einer der Restklassen 3^t oder $2 \cdot 3^t$ mod 3^{t+1} liegen, durchlaufen $\rho^{c(s,0)}a$ und $\rho^{c(s,0)}b$ gesamthaft die Reste von E, die in den Klassen 3^t bzw. $2 \cdot 3^t$ mod 3^{t+1} liegen. Durch die $\rho^{c(s,j)}0, \rho^{c(s,j)}a, \rho^{c(s,j)}b$ wird somit E schlicht überdeckt.
b) Die Bedingungen sind aber auch notwendig: Jetzt sei $E=D+\sum_{i=1}^{r-1}\rho_i D$ vorausgesetzt. Die Punkte $0,a,b,\rho_i 0,\rho_i a,\rho_i b$ $(i=1,2,\ldots,r-1)$ bilden demnach ein vollständiges Restsystem mod m. Insbesondere gelten $\rho_i 0 \equiv c_i, \rho_i a \equiv a+c_i, \rho_i b \equiv b+c_i$ für $(m-3)/3$ verschiedene Reste mod m.
Wir betrachten jetzt das Polynom $f(x)=1+x^a+x^b+\sum_{i=1}^{r-1}(x^{c_i}+x^{a+c_i}+x^{b+c_i})$ und formen es auf zwei Arten um: Einerseits ist $f(x)=\sum_{i=0}^{m-1}x^i+g(x)(x^m-1)$ $=(x^m-1)/(x-1)+g(x)(x^m-1)=(x^m-1)/(x-1)h(x)$, wo $h(x)$ ein normiertes Polynom aus $Z[x]$ mit $h(1)=1$ ist, anderseits wird
$f(x)=(1+x^a+x^b)(1+x^{c_1}+x^{c_2}+\cdots+x^{c_{r-1}})$.

Ist $\phi_d(x)$ das d-te Kreisteilungspolynom, so ergibt der Vergleich der beiden Darstellungen von $f(x)$: $(1+x^a+x^b)(1+x^{c_1}+\cdots+x^{c_{r-1}})=h(x)\prod_{d|m,d\neq 1}\phi_d(x)$.
Wegen der Irreduzibilitat der $\phi_d(x)$ und mit $h(1)=1$ folgt daraus $j(x)=1+x^a+x^b$ $=k(x)\prod_*\phi_d(x)$, wo $k(x)$ ein normiertes Polynom aus $Z[x]$ mit $k(1)=1$ ist und sich das Produkt $\prod_*$ nur noch über gewisse Teiler von m erstreckt. Aus $j(1)=3$ schliesst man $\prod_*\phi_d(1)=3$. Da $\phi_{p^a}(1)=p$ für primes p und $\phi_u(1)=1$ sonst gelten, muss genau einer der in $\prod_*$ berücksichtigten Teiler eine Dreierpotenz 3^a $(1 \leqslant a \leqslant k)$ sein. Damit wird $j(x)=\phi_{3^a}(x)s(x)$ oder ausführlich $1+x^a+x^b$ $=(1+x^{3^{a-1}}+x^{2\cdot 3^{a-1}})s(x)$. Setzen wir darin für x die Einheitswurzel $\zeta=\exp(2\pi i/3^a)$ ein, so wird $1+\zeta^a+\zeta^b=0$. ζ^a und ζ^b müssen verschiedene dritte Einheitswurzeln

$\neq 1$ sein. Somit werden $a = a_1 \cdot 3^{\alpha-1}$ und $b = b_1 \cdot 3^{\alpha-1}$ mit $(a_1, 3) = (b_1, 3) = (b_1 - a_1, 3) = 1$ und deshalb $(a, 3^k) = (b, 3^k) = (b - a, 3^k) = 3^{\alpha-1}$ mit $0 \leqslant \alpha - 1 \leqslant k - 1$.

Weitere Beiträge sandten L. Kuipers (Mollens VS), H. Warncke (Pôrto Alegre, Brasilien).

Aufgabe 824. Für beliebige $n \in \mathbf{Z}$ bestimme man den Wert des unendlichen Kettenbruches

$$K_n = \cfrac{n}{n + \cfrac{n+1}{n+1+\cfrac{n+2}{n+2+\cdots}}},$$

in dem die Teilzähler und Teilnehmer beständig um 1 anwachsen.

I. Paasche, München, BRD

Lösung: Aus $K_n = n/(n + K_{n+1})$ folgt

$$K_{n+1} = n\frac{1-K_n}{K_n}. \tag{1}$$

Für $K_0 = 0$ findet man aus (1) sofort durch vollständige Induktion $K_{-n} = n\,(n \in \mathbf{N})$. Aus der Eulerschen Kettenbruchentwicklung von e folgt $K_2 = e - 2$ und daher nach (1) $K_1 = 1/(e-1)$.

Wir schreiben für $n \in \mathbf{N}$

$$K_n = -n\frac{\alpha_n e + \beta_n}{\alpha_{n-1}e + \beta_{n-1}}. \tag{2}$$

Mit (1) und (2) ergibt sich die Rekursion

$$(n+1)\alpha_{n+1} = \alpha_{n-1} + n\alpha_n \tag{3}$$

und analog für β_{n+1}. Aus K_1 und K_2 haben wir $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_0 = -1, \beta_1 = -1$. Aus (3) folgt dann sofort $\beta_n = -1\,(n \in \mathbf{N})$. Aus (3) erhält man

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = -\frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{n+1}$$

und daraus sofort

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k/k!\,.$$

Der Wert des betrachteten Kettenbruches ist also für $n \in \mathrm{N}$ gegeben durch

$$K_n = \frac{-n \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k/k!}{\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k/k!}.$$

J.H. van Lint, Eindhoven, NL

Bemerkung: Mit Hilfe der durch

$$D_0 = 1, \qquad D_1 = 0, \qquad D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$$

oder

$$D_0 = 1, \qquad D_n = n D_{n-1} + (-1)^n$$

definierten Derangementzahlen D_n lässt sich das letztere Resultat auch in folgender Form schreiben:

$$K_n = -\frac{n! - e D_n}{(n-1)! - e D_{n-1}}.$$

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bolligen), P. Bundschuh (Köln, BRD), L. van Hamme (Brussel, B), W. Janous (Innsbruck, A), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Hj. Stocker (Wädenswil), W. Volgmann (Bochum, BRD) (2 Lösungen), M. Vowe (Therwil), H. Warncke (Pôrto Alegre, Brasilien) (Teillösung).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Dezember 1980* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S.67), Problem 625B (Band 25, S.68), Problem 645A (Band 26, S.46), Problem 672A (Band 27, S.68), Aufgabe 680 (Band 27, S.116), Problem 724A (Band 30, S.91), Problem 764A (Band 31, S.44).

Aufgabe 841. Sechs in einer Ebene liegende Kreise, die einen gegebenen Grundkreis k rechtwinklig schneiden, seien so angeordnet, dass im Inneren von k ein rechtwinkliges Kreisbogensechseck s entsteht. Zu je zwei Gegenseiten von s existiert dann genau ein Mittellot, d.i. ein Kreis, der diese Seiten und den Grundkreis rechtwinklig schneidet. Man zeige, dass sich die drei Mittellote innerhalb s in einem Punkt schneiden. Der Beweis ist ohne Hilfsmittel der hyperbolischen Geometrie zu führen.

P. Buser, Bonn, BRD

Aufgabe 842. Man bestimme alle $a, b \in \mathbf{R}$ derart, dass

$$ax+b[x \log x+(1-x) \log(1-x)] \geqslant 0 \quad \text{für alle} \quad x \in]0,1[.$$

J. Aczél, Waterloo, Ontario, CDN

Aufgabe 843. Es seien $t_1, \ldots, t_n (n \geqslant 2)$ nicht notwendig verschiedene Punkte des reellen Einheitsintervalls $[0,1]$ und $g_1, \ldots, g_n$ nichtnegative Gewichte mit $g_1+\cdots+g_n = 1$. Man interpretiere die beiden Momente

$$x=g_1 t_1+\cdots+g_n t_n \quad \text{und} \quad y=g_1 t_1^2+\cdots+g_n t_n^2$$

als kartesische Koordinaten eines Punktes in der Ebene.
1. Welche Punktmenge M beschreibt (x,y) bei variablen $(t_i), (g_i)$?
2. Man bestimme $\max\{y-x^2 \mid (x,y) \in M\}$. A. Pfluger, Zürich

Literaturüberschau

A.S. Smogorschewski: Lobatschewskische Geometrie; Übersetzung aus dem Russischen. Mathematische Schulbücherei, Nr. 96. 75 Seiten mit 43 Abbildungen. M 6.-. Teubner, Leipzig 1978.

Der Versuch, Schülern heute - im Zeitalter Bourbakis - hyperbolische Geometrie nahezubringen, ist ganz ausserordentlich zu begrüssen. Smogorschewski bedient sich bei diesem Unterfangen des Poincaréschen Halbebenenmodells.

Nach einem knappen Abriss über das Leben Lobatschewskis (Geburtsjahr 1792 oder 1793?) folgt ein Kapitel zur axiomatischen Methode in der Geometrie. Dieser Abschnitt kann mathematisch weder nach Inhalt noch nach Form befriedigen. Da ist z.B. die Rede von «räumlichen Körpern», von «der reinen Geometrie», von «der Wissenschaft räumlicher Formen»... Es finden sich Sätze wie dieser: «Die nichteuklidischen Geometrien erweisen sich als richtig, da ihre Aussagen erfolgreich auf praktische Probleme angewendet werden können.» Welche Anwendungen sind das? Wie steht es mit der Widerspruchsfreiheit? Die Behauptung, dass «ohne Lobatschewskis Entdeckung die Relativitätstheorie nicht hätte entwickelt werden können» ist - bei aller Achtung vor den Leistungen Lobatschewskis - einfach falsch.

Kapitel 3 bringt die Definition der Inversion am Kreis und die Untersuchung der Eigenschaften dieser Abbildung. Die übliche Abschliessung der Ebene durch einen uneigentlichen Punkt (von Bedeutung im Hinblick auf spätere Untersuchungen), Hinweise auf die Stetigkeit der Abbildung und auf den Wechsel der Orientierung fehlen. Die Verwendung modernerer, sinnvoller Sprechweisen wie etwa Bijektivität wäre zu begrüssen - diese Bemerkung gilt für das ganze Buch.

Nachdem festgelegt ist, was hyperbolische Punkte im Modell sein sollen, wird recht unmotiviert und auch eigenwillig eine Längenmessung eingeführt. Von da aus erst kommt der Autor zu hyperbolischen Geraden, Kreisen, Grenzkreisen, Abstandslinien und schliesslich zu hyperbolischen Abbildungen - ein ungewohnter Weg. Dann wird gezeigt, dass zwei Axiome (was ist mit den anderen?) der hyperbolischen Geometrie im konstruierten Modell erfüllt sind. Der Beweis einiger Sätze aus der hyperbolischen Geometrie schliesst sich an. Nach einem Zwischenkapitel über Hyperbelfunktionen (mit Näherungen wird dabei recht grosszügig umgegangen) legt der Autor - wieder völlig unmotiviert - eine Längenmasszahl fest. Die konsequente Verwendung eines Normierungsfaktors wäre wünschenswert. Es fehlt ein Hinweis darauf, dass diese Masszahl die einzige ist, welche gewisse «sinnvolle» Forderungen erfüllt. Die Herleitung trigonometrischer Formeln liesse sich noch kürzer und dabei allgemeiner (nicht nur für rechtwinklige Dreiecke) durchführen.