

Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **35 (1980)**

Heft 2

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

daran, dass der Rechner auf Exponentialanzeige umstellt. Dies trifft beim folgenden Beispiel 2 zu.

Beispiel 2

$$\begin{aligned} a(x) = \varphi_0(x) &= 3x^5 + 5x^4 - 3x^3 + x^2 + 7x - 5, \\ \beta(x) = \varphi_1(x) &= 15x^4 + 20x^3 - 9x^2 + 2x + 7. \end{aligned}$$

Der Ausdruck des Rechners ist – soweit er ganzzahlig ist – in der rechten Spalte von Figur 5 festgehalten. Bei $\varphi_4(x)$ angelangt, hat der Rechner als nächstes mit dem Faktor $h = 47023^2 = 2213043849$ das zu $\varphi_3(x)$ assoziierte Polynom zu bestimmen. Da schon h eine 10stellige Zahl ist, gerät man mit diesem Schritt über den Bereich der Ganzzahligkeit hinaus. (Fortsetzung im nächsten Heft.)

M. Jeger, Mathematisches Seminar, ETH Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 G. Birkhoff und S. Mac Lane: A Survey of modern Algebra, 4. Aufl. New York, London 1977.
- 2 M. Jeger: Algorithmische Kombinatorik auf der Stufe programmierbarer Taschen-Rechner. ZAMP, Heft 2, S. 243–260 (1979).
- 3 R. Kochendörffer: Einführung in die Algebra, 4. Aufl. Berlin 1974.
- 4 W. Krull: Elementare und klassische Algebra vom modernen Standpunkt, Band I. Sammlung Göschen, Bd. 930, 3. Aufl. Berlin 1963.
- 5 N. Obreschkoff: Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome. Berlin 1963.

Kleine Mitteilungen

Die Cantorsche Abbildung ist ein Borel-Isomorphismus

Die Cantorsche Abbildung benutzt man im allgemeinen, um zu zeigen, dass $J =]0, 1[$ und $J \times J$ dieselbe Mächtigkeit haben. Sie ist folgendermassen definiert (vgl. [2], S. 66): Jedes $x \in J$ hat eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-a_1 - \dots - a_n}$, wobei $\{a_n\}$ eine Folge von natürlichen Zahlen ist. Dies gilt, da sich x in eindeutiger Weise in einen dyadischen Bruch mit unendlich vielen Einsen entwickeln lässt. Die Darstellung liefert für jedes $n \in \mathbf{N}$ [\mathbf{N} bezeichnet die natürlichen Zahlen (ohne Null)] eine Abbildung X_n von J nach \mathbf{N} , die durch $X_n(x) = a_n$ gegeben ist. Für alle $x, y \in J$ sei $f(x, y) \in J$ definiert vermöge $X_{2n-1}(f(x, y)) = X_n(x)$ und $X_{2n}(f(x, y)) = X_n(y)$, $n \in \mathbf{N}$. f ist eine bijektive Abbildung von $J \times J$ auf J . Hausdorff ([2], S. 377) nennt sie Cantorsche Abbildung. Er sagt, sie rühre im Prinzip von Cantor her (vgl. [1]).

Es ist wohlbekannt, dass es keine stetige bijektive Abbildung von $J \times J$ auf J gibt ([2], S. 377). Also ist f nicht stetig. Es ist nicht schwierig zu zeigen, dass die Unstetigkeitsstellen von f auf abzählbar vielen Hyperebenen $\mathbf{R} \times \{y\}$ bzw. $\{x\} \times \mathbf{R}$ liegen, wobei $x, y \in \{z \in J : z = k \cdot 2^{-l}, k, l \in \mathbf{N}\}$ gilt und \mathbf{R} die reellen Zahlen bezeichne. Das Ziel dieser Note ist es, einen elementaren Beweis dafür zu geben, dass f ein Borel-Isomorphismus ist.

Satz. Die Cantorsche Abbildung ist ein Borel-Isomorphismus.

Beweis: Die σ -Algebra der Borelschen Mengen von J wird erzeugt von den Mengen $\{x: X_1(x)=k_1, \dots, X_n(x)=k_n\}$, wobei $n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ und $k_n \geq 2$ ist. In der Tat, sei $z = 2^{-l_1} + \dots + 2^{-l_1 - \dots - l_j}$, $z_0 = 0$ und $z_k = 2^{-l_1} + \dots + 2^{-l_1 - \dots - l_k}$, wobei $j, k, l_1, \dots, l_j \in \mathbb{N}$ und $k \leq j$ sei, dann gilt $]0, z] = \bigcup_{k=1}^j]z_{k-1}, z_k]$, $]z_{k-1}, z_k] = \bigcup_{m=1}^{\infty}]z_{k-1} + 2^{-l_1 - \dots - (lk+m)}, z_{k-1} + 2^{-l_1 - \dots - (lk+m-1)}]$ und $]z_{k-1} + 2^{-l_1 - \dots - (lk+m)}, z_{k-1} + 2^{-l_1 - \dots - (lk+m-1)}]$
 $= \{x: X_1(x)=l_1, \dots, X_{k-1}(x)=l_{k-1}, X_k(x)=l_k+m\}$.

f ist nun Borel messbar, da $f^{-1}\{z: X_1(z)=k_1, \dots, X_n(z)=k_n\} = \{x: X_i(x)=k_{2i-1}, i=1, \dots, [n/2] + \delta_n\} \times \{y: X_j(y)=k_{2j}, j=1, \dots, [n/2]\}$ gilt ($\delta_n = 1$ für $n = 2m + 1$ und $\delta_n = 0$ für $n = 2m$).

Schliesslich ist f^{-1} Borel messbar, da

$f(\{x: X_1(x)=k_1, \dots, X_m(x)=k_m\} \times \{y: X_1(y)=l_1, \dots, X_n(y)=l_n\}) = \{z: X_{2i-1}(z)=k_i, X_{2j}(z)=l_j, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n\}$ gilt.

Die rechte Seite ist ein endlicher Durchschnitt von Mengen $\{z: X_r(z)=s\}$, $r, s \in \mathbb{N}$. Diese Mengen sind Borel messbar wegen der Gleichung $\{z: X_r(z)=s\}$

$$= \bigcup_{k_1, \dots, k_{r-1} \in \mathbb{N}} \{z: X_1(z)=k_1, \dots, X_{r-1}(z)=k_{r-1}, X_r(z)=s\}.$$

D. Mussmann und D. Plachky, Münster, Westfalen

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 G. Cantor: Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. J. reine angew. Math. 84, 242-258 (1878).
- 2 F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre. Chelsea Publication Co., New York 1949.

Aufgaben

Aufgabe 819. Zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ bestimme man die grösste natürliche Zahl $t(n)$ mit folgender Eigenschaft: In jeder 5zeiligen und n -spaltigen Matrix aus Nullen und Einsen gibt es zwei Zeilen, die in $t(n)$ Spalten jeweils zwei Nullen oder zwei Einsen enthalten.
 H. Harborth und J. Mengersen, Braunschweig, BRD

Lösung der Aufgabensteller: Jede Spalte einer beliebigen fünfzeiligen und n -spaltigen Matrix M aus Nullen und Einsen enthält mindestens drei Nullen oder drei

Einsen. Damit enthält ein Zeilentripel T der $\binom{5}{3} = 10$ möglichen Zeilentripel von

M nach dem Schubfachprinzip in mindestens $\lceil n/10 \rceil$ Spalten jeweils drei Nullen oder drei Einsen ($\lceil x \rceil$ bzw. $\lfloor x \rfloor$ bezeichnen die kleinste ganze Zahl $\geq x$ bzw. die grösste ganze Zahl $\leq x$). Da in jeder der übrigen Spalten in T mindestens zwei Nullen oder zwei Einsen stehen, enthält eines der drei Zeilenpaare aus T in mindestens

$$\left\lceil \frac{1}{3} (n - \lceil n/10 \rceil) + \lceil n/10 \rceil \right\rceil$$