Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **35 (1980)**

Heft 2

PDF erstellt am: **19.09.2024**

daran, dass der Rechner auf Exponentialanzeige umstellt. Dies trifft beim folgenden Beispiel 2 zu.

Beispiel 2

$$\alpha(x)=\varphi_0(x)=3x^5+5x^4-3x^3+x^2+7x-5,$$
$$\beta(x)=\varphi_1(x)=\qquad 15x^4+20x^3-9x^2+2x+7.$$

Der Ausdruck des Rechners ist - soweit er ganzzahlig ist - in der rechten Spalte von Figur 5 festgehalten. Bei $\varphi_4(x)$ angelangt, hat der Rechner als nächstes mit dem Faktor $h=47023^2=2\,213\,043\,849$ das zu $\varphi_3(x)$ assoziierte Polynom zu bestimmen. Da schon h eine 10stellige Zahl ist, gerät man mit diesem Schritt über den Bereich der Ganzzahligkeit hinaus. (Fortsetzung im nächsten Heft.)

M. Jeger, Mathematisches Seminar, ETH Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

1 G. Birkhoff und S. Mac Lane: A Survey of modern Algebra, 4. Aufl. New York, London 1977.
2 M. Jeger: Algorithmische Kombinatorik auf der Stufe programmierbarer Taschen-Rechner. ZAMP, Heft 2, S. 243-260 (1979).
3 R. Kochendörffer: Einführung in die Algebra, 4. Aufl. Berlin 1974.
4 W. Krull: Elementare und klassische Algebra vom modernen Standpunkt, Band I. Sammlung Göschen, Bd. 930, 3. Aufl. Berlin 1963.
5 N. Obreschkoff: Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome. Berlin 1963.

Kleine Mitteilungen

Die Cantorsche Abbildung ist ein Borel-Isomorphismus

Die Cantorsche Abbildung benutzt man im allgemeinen, um zu zeigen, dass $J=]0,1]$ und $J\times J$ dieselbe Mächtigkeit haben. Sie ist folgendermassen definiert (vgl. [2], S. 66): Jedes $x\in J$ hat eine eindeutige Darstellung $x=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-a_1-\cdots-a_n}$, wobei $\{a_n\}$ eine Folge von natürlichen Zahlen ist. Dies gilt, da sich x in eindeutiger Weise in einen dyadischen Bruch mit unendlich vielen Einsen entwickeln lässt. Die Darstellung liefert für jedes $n\in\mathbf{N}$ [$\mathbf{N}$ bezeichnet die natürlichen Zahlen (ohne Null)] eine Abbildung X_n von J nach $\mathbf{N}$, die durch $X_n(x)=a_n$ gegeben ist. Für alle $x,y\in J$ sei $f(x,y)\in J$ definiert vermöge $X_{2n-1}(f(x,y))=X_n(x)$ und $X_{2n}(f(x,y))=X_n(y)$, $n\in\mathbf{N}$. f ist eine bijektive Abbildung von $J\times J$ auf J. Hausdorff ([2], S. 377) nennt sie Cantorsche Abbildung. Er sagt, sie rühre im Prinzip von Cantor her (vgl. [1]).
Es ist wohlbekannt, dass es keine stetige bijektive Abbildung von $J\times J$ auf J gibt ([2], S. 377). Also ist f nicht stetig. Es ist nicht schwierig zu zeigen, dass die Unstetigkeitsstellen von f auf abzählbar vielen Hyperebenen $\mathbf{R}\times\{y\}$ bzw. $\{x\}\times\mathbf{R}$ liegen, wobei $x,y\in\{z\in J: z=k\cdot 2^{-l}, k,l\in\mathbf{N}\}$ gilt und $\mathbf{R}$ die reellen Zahlen bezeichne. Das Ziel dieser Note ist es, einen elementaren Beweis dafür zu geben, dass f ein Borel-Isomorphismus ist.

Satz. *Die Cantorsche Abbildung ist ein Borel-Isomorphismus.*

Beweis: Die σ-Algebra der Borelschen Mengen von J wird erzeugt von den Mengen $\{x: X_1(x)=k_1, \ldots, X_n(x)=k_n\}$, wobei $n, k_1, \ldots, k_n \in \mathbf{N}$ und $k_n \geqq 2$ ist. In der Tat, sei $z=2^{-l_1}+\cdots+2^{-l_1-\cdots-l_j}$, $z_o=0$ und $z_k=2^{-l_1}+\cdots+2^{-l_1-\cdots-l_k}$, wobei $j, k, l_1, \ldots, l_j \in \mathbf{N}$ und $k \leqq j$ sei, dann gilt $]0, z]=\bigcup_{k=1}^{j}]z_{k-1}, z_k]$, $]z_{k-1}, z_k]=\bigcup_{m=1}^{\infty}]z_{k-1}+2^{-l_1-\cdots-(l_k+m)}, z_{k-1}+2^{-l_1-\cdots-(l_k+m-1)}]$ und
$]z_{k-1}+2^{-l_1-\cdots-(l_k+m)}, z_{k-1}+2^{-l_1-\cdots-(l_k+m-1)}]$
$=\{x: X_1(x)=l_1, \ldots, X_{k-1}(x)=l_{k-1}, X_k(x)=l_k+m\}$.
f ist nun Borel messbar, da $f^{-1}\{z: X_1(z)=k_1, \ldots, X_n(z)=k_n\}$
$=\{x: X_i(x)=k_{2i-1}, i=1, \ldots, [n/2]+\delta_n\} \times \{y: X_j(y)=k_{2j}, j=1, \ldots, [n/2]\}$ gilt
($\delta_n=1$ für $n=2m+1$ und $\delta_n=0$ für $n=2m$).
Schliesslich ist f^{-1} Borel messbar, da
$f(\{x: X_1(x)=k_1, \ldots, X_m(x)=k_m\} \times \{y: X_1(y)=l_1, \ldots, X_n(y)=l_n\})$
$=\{z: X_{2i-1}(z)=k_i, X_{2j}(z)=l_j, i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, n\}$ gilt.
Die rechte Seite ist ein endlicher Durchschnitt von Mengen $\{z: X_r(z)=s\}$, $r, s \in \mathbf{N}$. Diese Mengen sind Borel messbar wegen der Gleichung $\{z: X_r(z)=s\}$

$$=\bigcup_{k_1, \ldots, k_{r-1} \in \mathbf{N}} \{z: X_1(z)=k_1, \ldots, X_{r-1}(z)=k_{r-1}, X_r(z)=s\}.$$

D. Mussmann und D. Plachky, Münster, Westfalen

LITERATURVERZEICHNIS

1 G. Cantor: Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. J. reine angew. Math. *84*, 242-258 (1878).
2 F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre. Chelsea Publication Co., New York 1949.

Aufgaben

Aufgabe 819. Zu gegebenem $n \in \mathbf{N}$ bestimme man die grösste natürliche Zahl $t(n)$ mit folgender Eigenschaft: In jeder 5zeiligen und n-spaltigen Matrix aus Nullen und Einsen gibt es zwei Zeilen, die in $t(n)$ Spalten jeweils zwei Nullen oder zwei Einsen enthalten.

H. Harborth und J. Mengersen, Braunschweig, BRD

Lösung der Aufgabensteller: Jede Spalte einer beliebigen fünfzeiligen und n-spaltigen Matrix M aus Nullen und Einsen enthält mindestens drei Nullen oder drei Einsen. Damit enthält ein Zeilentripel T der $\binom{5}{3}=10$ möglichen Zeilentripel von M nach dem Schubfachprinzip in mindestens $\lceil n/10 \rceil$ Spalten jeweils drei Nullen oder drei Einsen ($\lceil x \rceil$ bzw. $\lfloor x \rfloor$ bezeichnen die kleinste ganze Zahl $\geqslant x$ bzw. die grösste ganze Zahl $\leqslant x$). Da in jeder der übrigen Spalten in T mindestens zwei Nullen oder zwei Einsen stehen, enthält eines der drei Zeilenpaare aus T in mindestens

$$\left\lceil \frac{1}{3}(n-\lceil n/10 \rceil) + \lceil n/10 \rceil \right\rceil$$