

Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **34 (1979)**

Heft 2

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

1. Sei M nichtorientierbar (Abb. 1 mit $g=2$). Das obere Polygon in Abb. 1 ist ein Dreieck, bei dem an der Seite ab g Dreiecke ausgespart sind. Das untere Polygon besteht aus $g+1$ längs der Strecke ab zueinander versetzten Dreiecken. Beide Polygone haben je $3g+3$ Ecken und Kanten. Werden beide Polygone längs der Strecke ab verheftet, so fallen $2g+2$ Ecken und $g+1$ Kanten zusammen. Man erhält eine nichtorientierbare 2-Mannigfaltigkeit mit einer Randkomponente, $4g+4$ Ecken, $5g+5$ Kanten und zwei Polygonen. Mit dem Satz von Euler folgt wie verlangt:

$$\chi(M) = 4g + 4 - (5g + 5) + 2 = 1 - g.$$

2. Sei M orientierbar und $g > 0$ (Abb. 2 mit $g=2$). Das untere Polygon in Abb. 2 besteht aus $2g$ Sechsecken, die längs der Strecke ab zueinander versetzt sind. Das obere Polygon ist ein Dreieck, das mit dem unteren längs ab verheftet wird. Man erhält eine orientierbare 2-Mannigfaltigkeit mit einer Randkomponente, $8g+2$ Ecken, $12g+2$ Kanten und $2g+1$ Polygonen (von denen $2g$ in einer Ebene liegen). Mit dem Satz von Euler folgt wie verlangt:

$$\chi(M) = 8g + 2 - (12g + 2) + 2g + 1 = 1 - 2g.$$

J. M. Wills, Math. Inst. GH Siegen, BRD

Aufgaben

Aufgabe 801. Unter den Voraussetzungen

$$0 < A < a < b < B, \tag{1}$$

$$0 < m < 1, \tag{2}$$

$$a^m \cdot b^{1-m} = A^{m'} \cdot B^{1-m'} \tag{3}$$

gilt die Ungleichung

$$ma + (1-m)b < m'A + (1-m')B. \tag{4}$$

Dies ist zu beweisen.

R. Boutellier, Zürich

Lösung mit Verallgemeinerung:
Unter den Voraussetzungen

$$X < x < y < Y, \quad (1')$$

$$0 < m < 1, \quad (2')$$

$$m x + (1 - m) y = m' X + (1 - m') Y \quad (3')$$

gilt für jede auf dem Intervall $[X, Y]$ strikt konvexe Funktion f die Ungleichung

$$m f(x) + (1 - m) f(y) < m' f(X) + (1 - m') f(Y). \quad (4')$$

Beweis: Es sei

$$\lambda = \frac{Y - x}{Y - X} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{Y - y}{Y - X}.$$

Dann ist $\lambda, \mu \in]0, 1[$, $x = \lambda X + (1 - \lambda) Y$ und $y = \mu X + (1 - \mu) Y$. Da f strikt konvex ist, gilt somit:

$$f(x) < \lambda f(X) + (1 - \lambda) f(Y) \quad \text{und} \quad f(y) < \mu f(X) + (1 - \mu) f(Y).$$

Daraus folgt

$$m f(x) + (1 - m) f(y) < [m \lambda + (1 - m) \mu] f(X) + [m(1 - \lambda) + (1 - m)(1 - \mu)] f(Y).$$

Der Beweis schliesst mit der Bemerkung, dass wegen (3')

$$m \lambda + (1 - m) \mu = m' \quad \text{und} \quad m(1 - \lambda) + (1 - m)(1 - \mu) = 1 - m'.$$

Die Behauptung der vorgelegten Aufgabe ergibt sich hieraus als Spezialfall mit $f = \exp$, $e^X = A$, $e^x = a$, $e^Y = B$, $e^y = b$.

A. Brunnschweiler, Egnach

Weitere Lösungen sandten P. Addor (Bern), K. Bickel (Freiburg, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Hämmerling (Aachen, BRD), A. Jagers (Enschede, NL), L. Kuipers (Mollens VS).

Aufgabe 802. Man gebe geschlossene Terme für die Summen

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k},$$

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k+1} = \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k+1} \binom{2n-2k}{n-k} = b'_n$$

und

$$c_n = \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k+1} \binom{2n-2k}{n-k+1}$$

an.

J. Binz, Bolligen

1. Solution: In Pascal's triangle it is easily seen that

$$\binom{2n}{n+1} = \binom{2n+1}{n+1} - \binom{2n}{n} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1} - \binom{2n}{n} \quad (n \geq 0). \quad (*)$$

Furthermore, we observe that for $|x| < 1/4$

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n = (1-4x)^{-1/2}$$

so that, using (*) we obtain

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n+1} x^n = \frac{1}{2x} [(1-4x)^{-1/2} - 1] - (1-4x)^{-1/2}$$

and

$$h(x) := f(x) + g(x) = \frac{1}{2x} [(1-4x)^{-1/2} - 1].$$

The desired sums can be obtained as Taylor coefficients for the functions $f^2(x)$, $f(x)g(x)$, and $h^2(x) - f^2(x) - 2f(x)g(x)$, respectively. We find

$$f^2(x) = (1-4x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n,$$

$$f(x)g(x) = \left(\frac{1}{2x} - 1\right) (1-4x)^{-1} - \frac{1}{2x} (1-4x)^{-1/2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(4^n - \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1}\right) x^n,$$

$$h^2(x) = \frac{1}{4x^2} [(1-4x)^{-1} + 1 - 2(1-4x)^{-1/2}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(4^{n+1} - \frac{1}{2} \binom{2n+4}{n+2}\right) x^n.$$

Summarizing we finally get

$$\begin{aligned} a_n &= 4^n \\ b_n &= b'_n = 4^n - \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1} \end{aligned}$$

and, again using (*)

$$\begin{aligned} c_n &= 4 \cdot 4^n - \frac{1}{2} \binom{2n+4}{n+2} - 4^n - 2 \cdot 4^n + \binom{2n+2}{n+1} \\ &= 4^n - \binom{2n+2}{n+2} \\ &= 4^n - \binom{2n+2}{n}. \end{aligned}$$

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

2. Solution: We consider a symmetric random walk on the integers starting in 0 at epoch 0, cf. [1], chap. III. By u_k we denote the probability of a return to 0 at epoch k . Clearly $u_{2k+1} = 0$, and

$$u_{2k} = \binom{2k}{k} 2^{-2k}. \quad (1)$$

As a consequence

$$2u_{2k+2} - u_{2k} = \binom{2k}{k+1} 2^{-2k}. \quad (2)$$

By the arcsine law for last visits [1], p. 79 (compare also [1], p. 82), the quantity $u_{2k} \cdot u_{2n-2k}$ is equal to the probability that up to and including epoch $2n$ the last visit to 0 occurs at epoch $2k$. Thus, in particular,

$$\sum_{k=0}^n u_{2k} u_{2n-2k} = 1, \quad (3)$$

and hence

$$\sum_{k=0}^n u_{2k} u_{2n+2-2k} = 1 - u_{2n+2}, \quad \sum_{k=0}^n u_{2k+2} u_{2n+2-2k} = 1 - 2u_{2n+4}. \quad (4)$$

By combining (1) to (4) we find

$$a_n = 4^n, \quad b_n = 4^n - \binom{2n+1}{n}, \quad c_n = 4^n - \binom{2n+2}{n}. \quad \square$$

A. Jagers, Enschede, NL

REFERENCE

- 1 W. Feller: An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. 1, 3rd ed. Wiley, New York 1968.

Weitere Lösungen sandten A. Brunnschweiler (Egnach), P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Hämmerling (Aachen, BRD) (2 Lösungen), L. Himstedt (Bad Harzburg, BRD), M. Koch (Braunschweig, BRD), L. Kuipers (Mollens VS), W. Moser (Montreal, CDN), I. Paasche (München, BRD) (2 Lösungen), R. Razen (Leoben, A), A. Reuschel (Wien, A), Hj. Stocker (Wädenswil), J. Suck (Bochum, BRD), M. Vowe (Therwil), H. Warncke (Pôrto Alegre, BR).

Aufgabe 803. Auf einer Kugel K mit Zentrum O seien die Punkte P_1, P_2, P_3 gegeben. Man bestimme einen Punkt Z auf K so, dass bei der Projektion aus Z auf eine zu OZ normale Ebene die Punkte P_i in die Ecken P'_i eines gleichseitigen Dreiecks abgebildet werden.

C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung: Die Aufgabe lässt sich auch folgendermassen formulieren: Gesucht Z auf K , so dass die stereographische Projektion von Z aus die Punkte P_i in die Ecken P'_i eines gleichseitigen Dreiecks abbildet.

Projiziert man stereographisch von einem beliebigen Punkt von K aus, so erhält man folgende äquivalente planimetrische Aufgabe: Gegeben sind drei Punkte P_1, P_2, P_3 . Gesucht ist das Zentrum Z einer Inversion, welche die Punkte P_i in die Ecken P'_i eines gleichseitigen Dreiecks abbildet.

Lösung: Die Urbilder der Seiten dieses gleichseitigen Dreiecks sind drei Kreise durch Z und je zwei der Punkte P_i , welche sich in Z paarweise unter 60° schneiden. Macht man eine Inversion mit dem Zentrum P_1 , welche P_2, P_3 und Z in P'_2, P'_3 und Z' abbildet, so ist leicht zu sehen, dass das Dreieck $P'_2 P'_3 Z'$ gleichseitig sein muss. Damit ist Z' und also auch Z bestimmt. Die Aufgabe hat stets zwei Lösungen.

J. M. Ebersold, Winterthur

Weitere Lösungen sandten L. Kuipers (Mollens VS), O. P. Lossers (Eindhoven, NL) (2 Lösungen), A. Reuschel (Wien, A), G. Unger (Dornach), R. Wyss (Flumenthal).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Oktober 1979* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ...A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

Aufgabe 819. Zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ bestimme man die grösste natürliche Zahl $t(n)$ mit folgender Eigenschaft: In jeder 5zeiligen und n -spaltigen Matrix aus Nullen und Einsen gibt es zwei Zeilen, die in $t(n)$ Spalten jeweils zwei Nullen oder zwei Einsen enthalten.

H. Harborth und J. Mengersen, Braunschweig, BRD

Aufgabe 820. Von der komplexen Differenzengleichung

$$a(r+n) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k a(r+k)$$

wird vorausgesetzt, dass für jede Wahl von Anfangswerten $a(0), \dots, a(n-1)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = 0$$

gilt. Man zeige, dass die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} a(r)$ konvergiert und gebe ihre Summe an.

J. Golser, Wien, A

H. Wimmer, Würzburg, BRD

Aufgabe 821. Eine Folge $(S_n)_{n=1,2,\dots}$ nichtnegativer reeller Zahlen genüge bei festem $a > 0$ der Ungleichung

$$S_{n+1} \leq a n S_n + S_{n-1} \quad \text{für } n = 2, 3, \dots$$

Man beweise die Existenz einer nur von S_1, S_2 und a abhängigen Konstanten $C \geq 0$ derart, dass

$$S_n \leq C a^n (n-1)! \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

gilt.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Literaturüberschau

G. B. Folland: Introduction to partial differential equations. 349 Seiten. US-\$ 10.75. Princeton University Press, 1976.

Das Buch umfasst den klassischen Stoff aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Das Hauptgewicht liegt auf der sauberen Durchführung von Existenzsätzen, wobei zum Teil moderne Hilfsmittel aus der Masstheorie und Funktionalanalysis beigezogen werden. Dabei kommen Motivierung sowie praktische Lösungsmethoden zu kurz. Das Buch eignet sich vor allem für Mathematiker als Einführung in die moderne Theorie.

C. Bandle