# Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **33 (1978)**

Heft 3

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Es gibt nämlich eine Kurve aus (2) mit $\psi$ = konst., die in $V$ beginnt und $D$ durchläuft. Gemäss (17) berechnet man $x^{**}$. Die Achsenparallele $x = x_0^{**}$ ($x_0^{**} > x_D$!) schneidet die Zylinderkurve unten genau einmal. Wegen der Monotonie von $x^{**}$ [mit Hilfe von (17) und (2) zu errechnen] kann rechts von dieser Parallelen keine Kurve aus (2) verlaufen, und somit liegt auch der Enveloppenbogen links. Damit ist die Randeigenschaft der Zylinderkurve bis in sehr grosse Nähe von $S$ bewiesen.

### V. Schlussbetrachtung

Der äussere Bildrand unseres Kegelstumpfproblems ist in der vollen Klasse aller konvexen Rotationskörper ohne Bedeutung, sind doch alle Extremalkörper bekannt ([1], § 28). Was aber den inneren Bildrand betrifft, so vermute ich, dass er mit Ausnahme des Bogens $SU$ für die volle Klasse seine Gültigkeit beibehält. Diese Vermutung stützt sich auf ein Teilresultat (Fig. 2) sowie auf gesicherte Extremaleigenschaften von Kegeln[3]).

H. Bieri, Wabern (Köniz)

3) In einer noch unveröffentlichten Note konnte ich zeigen, dass im Intervall $8/\pi^2 < x \leqq 0{,}842153$ mit $0 < \alpha \leqq \alpha^* = 0{,}431365$ symmetrische Kugellinsen, hernach im Intervall $0{,}842153 < x \leqq 0{,}857102$ symmetrische Kappenkörper der speziellen Linse mit $\alpha = \alpha^*$ und $0 < \beta \leqq 23{,}528356°$ notwendige Bedingungen für ein Maximum von $V$ erfüllen und somit mit grosser Wahrscheinlichkeit das fehlende Stück des inneren Bildrandes liefern werden.

# Kleine Mitteilungen

## Über eine Primzahlkongruenz

### 1. Einleitung

In [1] wird eine Matrix $A$ folgendermassen definiert:

**Definition 1.1.** *$p$ sei eine Primzahl; $A = (a_{ij})$ ist die Matrix, deren Elemente durch folgendes Rekursionsschema gegeben sind:*

$$a_{i,1} = i, \qquad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

$$a_{i,k} = i \sum_{j=1}^{i} a_{j,k-1}, \qquad k > 1 \quad \text{und} \quad i = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Es wird dann bewiesen:

**Theorem 1.2.** *Alle Elemente von $A$ unterhalb der Nebendiagonalen sind durch $p$ teilbar.*

Die Autoren fragen nach einem Beweis ihres Satzes unter Benutzung von Matrizenrechnung. In der vorliegenden Note soll ein einfacher Beweis dieser Art mitgeteilt werden.

## 2. Der Beweis

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ p-1 & p-1 & p-1 & & p-1 \end{pmatrix}, \qquad v=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p-1 \end{pmatrix}.$$

Es wird sofort klar, dass die Spalten von $A$ gerade durch $v$, $Mv$, $M^2v$, ..., $M^{p-2}v$ gegeben sind. Beachtet man, dass $v$ die erste Spalte von $A$ ist, so lässt sich dies auch so ausdrücken: die Spalten von $A$ sind gegeben durch die erste Spalte der Matrizen $M$, $M^2$, $M^3$, ..., $M^{p-1}$. Da uns die Kongruenzen $\bmod p$ interessieren, wollen wir die Matrixelemente als Elemente des Primkörpers der Charakteristik $p$, $F_p$, auffassen.

**Satz 2.1.** *$M$ ist (über $F_p$) diagonalisierbar und hat die $p-1$ verschiedenen Eigenwerte $1, 2, 3, \dots, p-1$.*

Beweis: Für $k=1, 2, 3, \dots, p-1$ ist $\det(M-kI)=0$. Dabei bezeichnet $I$ die $(p-1)\times(p-1)$-Einheitsmatrix.

**Korollar 2.2.** *$M^{p-1}=I$.*

Beweis: $M$ ist aufgrund von 2.1 zu

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p-1 \end{pmatrix}$$

ähnlich, und $M^{p-1}=D^{p-1}=I$.

Wie erwähnt wollen wir auch niedrigere Potenzen von $M$ kennenlernen:

**Korollar 2.3.** *$M^k$ hat Nullen auf und unterhalb der $(p-k)$ten Subdiagonalen* $(k=2, 3, \ldots, p-1)$.

Beweis: Für $k=p-1$ ist das bereits in 2.2 enthalten. Wir zeigen nun: ist $x$ ein Spaltenvektor mit der Eigenschaft, dass die letzten $i$ Komponenten von $Mx$ gleich 0 sind, so sind die letzten $i-1$ Komponenten von $x$ gleich 0:

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{p-1} \end{pmatrix}, \quad Mx=\begin{pmatrix} x_1 \\ 2(x_1+x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (p-i-1)(x_1+x_2+\cdots+x_{p-i-1}) \\ (p-i)(x_1+x_2+\cdots+x_{p-i}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (p-1)(x_1+x_2+\cdots+x_{p-1}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{p-i-1} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also $(p-i)(x_1+\cdots+x_{p-i})=0$ und somit $x_1+\cdots+x_{p-i}=0$; ferner $(p-i+1)(x_1+\cdots+x_{p-i}+x_{p-i+1})=0=(p-i+1)x_{p-i+1}$, also $x_{p-i+1}=0$ usw.
Damit ist nun auch Satz 1.2 bewiesen. Durch Betrachtung nicht nur der ersten Spalte in $M$, $M^2$, ... ergeben sich natürlich weitere Resultate, die über 1.2 hinausgehen.

Paul R. Hafner, The University of Auckland, New Zealand

LITERATURVERZEICHNIS

1 L.J. Morley and A. Bishop: A prime congruence theorem. El. Math. *32*, 91-93 (1977).

# Aufgaben

**Aufgabe 786.** Es seien $f, g$ multiplikative zahlentheoretische Funktionen, ferner

$$F(m)=\sum_{d/m} f(d), \qquad G(n)=\sum_{d/n} g(d); \qquad m, n \in \mathbf{N}.$$

Zu gegebenen natürlichen Zahlen $a, b, m, n$ bezeichne $r$ bzw. $s$ den grössten Teiler von $a$ bzw. $b$, welcher relativ prim zu $m$ bzw. $n$ ist. Schliesslich seien $\varphi, \psi$ zwei durch die Beziehung