Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **32 (1977)**

Heft 6

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Aufgaben

Aufgabe 777. Der Punkt P liege in der Ebene eines Sehnenvierecks, dessen Ecken in zyklischer Anordnung mit A, B, C, D bezeichnet seien. Man zeige, dass dann stets

$$\frac{\overline{PA}^2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CD} + \overline{PC}^2 \cdot \overline{DA} \cdot \overline{AB}}{\overline{PD}^2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{PB}^2 \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DA}} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{CD} + \overline{DA} \cdot \overline{AB}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{CD} \cdot \overline{DA}}$$

G. Bercea, München, BRD

Lösung. Es sei S der Schnittpunkt von AC und BD. Wir setzen $\overline{SA} = p_1, \overline{SC} = p_2, \overline{SB} = q_1, \overline{SD} = q_2, \overline{PS} = z, p_1 + p_2 = p, q_1 + q_2 = q$. Dann ist

$$p_1 : p_2 = \overline{DA} \cdot \overline{AB} : \overline{BC} \cdot \overline{CD}; \qquad q_1 : q_2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC} : \overline{CD} \cdot \overline{DA}.$$

Es bleibt somit zu zeigen, dass

$$\frac{p_1 \overline{PC}^2 + p_2 \overline{PA}^2}{q_1 \overline{PD}^2 + q_2 \overline{PB}^2} = \frac{p}{q}. \tag{1}$$

Das ist schnell erledigt, denn der Satz von Stewart, angewandt auf die Dreiecke APC und BPD, ergibt

$$p_1 \overline{PC}^2 + p_2 \overline{PA}^2 = p(z^2 + p_1 p_2); \qquad q_1 \overline{PD}^2 + q_2 \overline{PB}^2 = q(z^2 + q_1 q_2).$$

Wegen $p_1 p_2 = q_1 q_2$ folgt hieraus (1).

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Bemerkung des Aufgabenstellers: Lässt man P mit einem Eckpunkt bzw. mit dem Umkreismittelpunkt des Sehnenvierecks zusammenfallen, so erhält man den ersten bzw. den zweiten Satz von Ptolemäus.
Anmerkung der Redaktion: L. Hämmerling und H. Walser bemerken, dass die Aussage von Aufgabe 777 auch dann richtig bleibt, wenn P nicht in der Ebene des Sehnenvierecks liegt.
Weitere Lösungen sandten K. Bickel (Freiburg, BRD), C. Bindschedler (Küsnacht), J.T. Groenman (Groningen, NL), K. Grün (Linz, A), L. Hämmerling (Aachen, BRD), L. Kuipers (Mollens VS), H. Walser (Frauenfeld).

Aufgabe 778. Für ein beliebiges ebenes Dreieck $A_1 A_2 A_3$ bestimme man einen Punkt P in seinem Inneren mit folgender Eigenschaft: Sind Q_1, Q_2, Q_3 die von P verschiedenen Schnittpunkte je zweier der drei durch P verlaufenden Kreise um A_1, A_2, A_3, so ist das Dreieck $Q_1 Q_2 Q_3$ zum gegebenen Dreieck ähnlich. Wann sind diese Dreiecke sogar kongruent?

J. Brejcha, Brno, ČSSR

Lösung. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Winkel, a_1, a_2, a_3 die Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$, ferner q_1, q_2, q_3 die Seiten des Dreiecks $Q_1Q_2Q_3$. Da offenbar Q_1, Q_2, Q_3 durch Spiegelung von P an a_1, a_2, a_3 entstehen, ist $\sphericalangle Q_2A_1Q_3 = 2\alpha_1$ und demnach $q_1 = 2\overline{A_1P}\sin\alpha_1$. Entsprechendes gilt für q_2 und q_3. Da das Dreieck $Q_1Q_2Q_3$ dem Dreieck $A_1A_2A_3$ ähnlich sein soll, folgt aus dem Sinussatz

$$2r_{ijk} = \frac{2\overline{A_1P}\sin\alpha_1}{\sin\alpha_i} = \frac{2\overline{A_2P}\sin\alpha_2}{\sin\alpha_j} = \frac{2\overline{A_3P}\sin\alpha_3}{\sin\alpha_k} \tag{1}$$

und weiter

$$r_{ijk} = \frac{\overline{A_1P}a_1}{a_i} = \frac{\overline{A_2P}a_2}{a_j} = \frac{\overline{A_3P}a_3}{a_k}, \tag{2}$$

wobei ijk eine Permutation der Ziffernfolge 123 und r_{ijk} der Umkreisradius des betreffenden Dreiecks $Q_1Q_2Q_3$ ist. Aus (2) ergeben sich z. B. die Verhältnisse

$$\frac{\overline{A_1P}}{\overline{A_2P}} = \frac{a_ia_2}{a_ja_1} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{A_1P}}{\overline{A_3P}} = \frac{a_ia_3}{a_ka_1}, \tag{3}$$

welche zeigen, dass P als Schnittpunkt zweier Apollonischer Kreise konstruiert werden kann. Demnach gibt es i.a. 6 mögliche Lagen von P.

Für $ijk = 123$ ist P der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $A_1A_2A_3$. In diesem Fall ist Dreieck $Q_1Q_2Q_3$ dem Dreieck $A_1A_2A_3$ kongruent. Für $ijk = 231$ heisst (3)

$$\frac{\overline{A_1P}}{\overline{A_2P}} = \frac{a_2^2}{a_1a_3} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{A_1P}}{\overline{A_3P}} = \frac{a_2a_3}{a_1^2},$$

was bedeutet, dass P einer der Brocard'schen Punkte ist; der andere ergibt sich für $ijk = 312$. (Siehe [1], 436.c, p. 268.)

In diesem Fall besteht Kongruenz genau dann, wenn der Brocard'sche Winkel $\omega = \pi/6$, d. h. das Dreieck $A_1A_2A_3$ gleichseitig ist.

Für $ijk = 132$ heisst (3)

$$\frac{\overline{A_1P}}{\overline{A_2P}} = \frac{a_2}{a_3} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{A_1P}}{\overline{A_3P}} = \frac{a_3}{a_2},$$

und dies bedeutet, dass P eine Ecke des 2. Brocard'schen Dreiecks des Dreiecks $A_1A_2A_3$ ist. Für $ijk = 321$ bzw. 213 ergeben sich die beiden anderen Ecken. (Siehe [1], 463, p. 279.)

Alle 6 möglichen Punkte liegen also auf dem Brocard'schen Kreis des Dreiecks $A_1A_2A_3$.

J. M. Ebersold, Winterthur

LITERATUR

1 Roger A. Johnson. Advanced Euclidian Geometry. Dover Publications, New York 1960.

Weitere Lösungen sandten K. Bickel (Freiburg, BRD), J.T. Groenman (Groningen, NL), K. Grün (Linz, A), L. Kuipers (Mollens VS), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), H. Walser (Frauenfeld).

Aufgabe 779. A sei der Ring aller ganzen algebraischen Zahlen. Ferner sei p eine Primzahl. Dann gilt:
a) Es gibt ein maximales Ideal P von A mit $p \in P$.
b) Ist P ein maximales Ideal von A mit $p \in P$, so ist A/P der algebraische Abschluss von $GF(p)$.
Dies ist zu beweisen.

H. Lüneburg, Kaiserslautern, BRD

Lösung des Aufgabenstellers. a) Wegen $pA \neq A$ gibt es nach einem bekannten Satz von Krull (siehe etwa [1], Satz VII.3.1, S. 259) ein solches P.
b) Es ist $p(1+P)=P$, so dass die Charakteristik von A/P gleich p ist. Es sei f ein Polynom mit Koeffizienten in A/P und $\mathrm{Grad}(f)=n \geq 1$. Um zu zeigen, dass f eine Nullstelle in A/P hat, können wir annehmen, dass der Leitkoeffizient von f gleich 1 ist. Es gibt dann $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ mit

$$f = x^n + (a_{n-1}+P)x^{n-1} + \cdots + (a_0+P).$$

Sei

$$g = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Weil $\mathbf{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, gibt es ein $a \in \mathbf{C}$ mit $g(a)=0$. Es folgt $a \in A$ (s. etwa [2], Theorem 40, p. 28).
Wegen $f(a+P)=g(a)+P=P$ ergibt sich somit, dass f eine Nullstelle in A/P hat, d.h. A/P ist algebraisch abgeschlossen. Es sei $B/P \subseteq A/P$ algebraisch abgeschlossen. Ferner sei $\beta \in A$,

$$h = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 \quad \text{mit} \quad b_0, \ldots, b_m \in \mathbf{Z},$$

und es gelte $h(\beta)=0$. Setzen wir

$$h^* = x^m + (b_{m-1}+P)x^{m-1} + \cdots + (b_0+P),$$

so ist h^* ein Polynom über $(\mathbf{Z}+P)/P = GF(p)$, und es ist $h^*(\beta+P) = h(\beta)+P = P$, somit $\beta + P \in B/P$. Dies impliziert $\beta + P \subseteq B$ und daher $\beta \in B$, so dass $A = B$ ist. Da es bis auf Isomorphie nur einen algebraischen Abschluss gibt, folgt schliesslich die Behauptung.

LITERATUR

1 H. Lüneburg: Einführung in die Algebra. Springer Hochschultext, 1973.
2 I. Kaplansky: Commutative Rings. Allyn and Bacon, Boston 1970.

Aufgabe 780. Man beweise: Für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[(k-1)/n]}}{2k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} (\pi - w_{nk}) \operatorname{cosec} w_{nk}.$$

Dabei ist $[x]$ = grösste ganze Zahl $\leq x$ und $w_{nk} = \dfrac{2k-1}{2n}\pi$.

I. Paasche, München, BRD

Lösung. Bezeichnen wir die linke Seite der zu beweisenden Gleichung mit s_n, die rechte mit s_n^*, so ist zunächst nach dem Abelschen Grenzwertsatz

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2ni+2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{x^{2k-1}}{1+x^{2n}} dx.$$

Nun gilt aber

$$\int_0^1 \frac{x^{2k-1}}{1+x^{2n}} dx = \int_1^{\infty} \frac{x^{2n-2k}}{1+x^{2n}} dx.$$

Also ist

$$s_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\infty} \frac{x^{2k-2}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{4n} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec} w_{nk}. \tag{1}$$

(s. etwa [1], S. 154, 3)). Andererseits hat man wegen $\sin \dfrac{2n-2k+1}{2n}\pi = \sin \dfrac{2k-1}{2n}\pi$:

$$s_n^* = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2n-2k+1}{2n} \operatorname{cosec} w_{nk} = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2n} \operatorname{cosec} w_{nk},$$

also nach (1): $2s_n^* = 2s_n$, Q.E.D.

M. Vowe, Therwil BL

LITERATUR

1 K. Rottmann: Mathematische Formelsammlung. B.I. Hochschultaschenbuch Bd. 13, 2. Auflage, Mannheim 1961.

Weitere Lösungen sandten B.C. Berndt (Urbana, Illinois USA), P. Bundschuh (Köln, BRD), O.P. Lossers (Eindhoven, NL).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Juni 1978* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A,B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, p. 67), Problem 625 B (Band 25, p. 68), Problem 645A (Band 26, p. 46), Problem 672A (Band 27, p. 68), Aufgabe 680 (Band 27, p. 116), Problem 724A (Band 30, p. 91), Problem 764A (Band 31, p. 44).

Aufgabe 795. Man beweise die Identität

$$\sum_{i=0}^{q}\left[\binom{p-1+i}{p-1}-\binom{p-1+i}{p}\right]\left[\binom{m+n-p-i}{m-p}-\binom{m+n-p-i}{n-p-1}\right]$$

$$=\sum_{i=p+1}^{m+1}\left[\binom{q-1+i}{q-1}-\binom{q-1+i}{q}\right]\left[\binom{m+n-q-i}{m-q}-\binom{m+n-q-i}{n-q-1}\right]$$

für alle natürlichen p,q,m,n mit $q\leq p-1\leq m-1$, $q\leq n-1\leq m-1$. Vorausgesetzt sei ferner die Nullkonvention $\binom{s}{t}=0$ für $s<t$ und $t<0$. J. Binz, Bern

Aufgabe 796. Man bestimme die Lösungsmenge der diophantischen Gleichung

$$3^{2x-1}+3^x+1=7^y; \qquad x,y\in\mathbf{N}.$$

L. Kuipers, Mollens VS

Aufgabe 797. Werden in der Zahlenfolge (a_n) mit

$$a_n=[[\sqrt{2n}]\,(\sqrt{2n}-[\sqrt{2n}])], \qquad n\in\mathbf{N}$$

die Glieder a_j mit $j=2m^2\,(m\in\mathbf{N})$ gestrichen, so gewinnt man eine Folge (b_n). Man berechne das allgemeine Glied b_{n_k} der Teilfolge (b_{n_k}), welche gemäss der Indexvorschrift $n_k=(k+1)(k+2)/2$ gebildet wird. Hj. Stocker, Wädenswil

Literaturüberschau

Statistical Theory of the Analysis of Experimental Designs. Von J. OGAWA. 465 Seiten. Fr. 100.-. Marcel Dekker, New York 1974.

Seit 1935 das fundamentale Werk *The Design of Experiments* von R.A. Fisher erschienen ist, hat die Theorie der statistischen Versuchsplanung grosse Fortschritte gemacht.

Das obgenannte Buch behandelt wesentliche Teile jener Theorie, die den Statistiker bereits im Stadium der Datenerfassung auf den Plan ruft. Die mathematische Behandlung erfolgt mit Beschränkung auf das lineare Modell und die Normalverteilung, wobei die eigentliche Konstruktion von statistischen Versuchsplänen ausgeklammert ist.