Sich schliessende p-Ecke aus Evoluten

Sich schliessende p-Ecke aus Evoluten

In manchen Bereichen der Differentialgeometrie spielen sich schliessende Figuren eine Rolle (siehe [1]). Hierzu gehört insbesondere die folgende Problemstellung: Kann man durch wiederholte Bildung der Evolute zu einer ebenen euklidischen Kurve nach p-Schritten die Ausgangskurve erreichen? Es wird die allgemeine Lösung angegeben für gerade Zahlen $p \geq 4$. Im Fall $p=4$ führt die vollständige Lösung auf bekannte Kurven der ebenen euklidischen Geometrie.

1. Auf einem offenen Intervall J sei die Kurve $\mathfrak{r}_0$: $J \to E_2$ durch die Funktion ihres Ortsvektors beschrieben, die genügend oft stetig differenzierbar vorausgesetzt wird. Bilden wir zu $\mathfrak{r}_0$ die 1-te bis p-te Evolute $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_p$ und gilt

$$\mathfrak{r}_p(t) = \mathfrak{r}_0(t)\ (t \in J), \tag{1}$$

so bestimmen zusammengehörende Kurvenpunkte $\mathfrak{r}_0(t)$, $\mathfrak{r}_1(t), \ldots, \mathfrak{r}_{p-1}(t)$ für jedes $t \in J$ ein geschlossenes Polygon – kurz *p-Eck* genannt – mit notwendig gerader Eckenzahl $p=2q$ und sich in den Eckpunkten lotrecht treffenden Seiten.

Wir fassen $\mathfrak{r}_0$ als Hüllkurve ihrer Tangenten auf, die wir in Hessescher Normalform angeben:

$$\mathfrak{n}\mathfrak{r} - \omega = 0, \mathfrak{n}^2 = 1, \tag{2}$$

wobei ω: $J \to \mathbf{R}$ die Stützfunktion in Bezug auf einen vorgegebenen Ursprung O ist. (2) beschreibt ausserdem eine Seite des p-Ecks für $t \in J$.

Ergänzen wir $\mathfrak{n}(t)$ an jeder Stelle $t \in J$ durch $\mathfrak{a}(t)$ zu einer kartesischen Vektorbasis

$$\mathfrak{n}^2 = \mathfrak{a}^2 = 1, \mathfrak{n}\mathfrak{a} = 0, \tag{3}$$

so gelten die Ableitungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{n}} &= a\mathfrak{a}, \\ \dot{\mathfrak{a}} &= -a\mathfrak{n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Für das Folgende führen wir den invarianten Parameter τ mit

$$a(\tau) = 1\ (\tau \in J) \tag{5}$$

ein, der als Richtungswinkel der Tangente bezeichnet werden kann.

Die Kurve $\mathfrak{r}_0$ errechnet sich aus der Gleichung (2) und deren Ableitung:

$$\dot{\mathfrak{n}}\mathfrak{r} - \dot{\omega} = 0 \tag{6}$$

unter Brücksichtigung von (3), (4) und (5) zu

$$\mathfrak{r}_0(\tau) = \omega(\tau)\mathfrak{n}(\tau) + \dot{\omega}(\tau)\mathfrak{a}(\tau). \tag{7}$$

Die Gerade (6) beschreibt die Normale der Kurve $\mathfrak{r}_0$, die wieder in Hessescher Normalform gegeben ist, wenn wir den invarianten Parameter τ aus (5) zugrundelegen. Weiterhin erhalten wir aus (4) und (5):

$$\overset{(2k)}{\mathfrak{n}}(\tau)=(-1)^k\mathfrak{n}(\tau)$$

$$\overset{(2k+1)}{\mathfrak{n}}(\tau)=\overset{(2k)}{\mathfrak{a}}(\tau)=(-1)^k\mathfrak{a}(\tau)\,. \qquad (k=0,1,\dots) \quad (8)$$

Daher führt die j-te Ableitung von (2) nach τ wieder auf eine Hessesche Normalform, die an der Stelle $\tau\in J$ die j-te Seite (von $\mathfrak{r}_0(\tau)$ aus gerechnet) des Evoluten-p-Ecks beschreibt. Der Parameter τ aus (5) ist also invarianter Parameter des p-Ecks aus Evoluten. Die j-te Evolute $\mathfrak{r}_j$ zu $\mathfrak{r}_0$ errechnet sich nun aus dem Gleichungssystem

$$\overset{(j)}{\mathfrak{n}}(\tau)\,\mathfrak{r}-\overset{(j)}{\omega}(\tau)=0$$

$$\overset{(j+1)}{\mathfrak{n}}(\tau)\,\mathfrak{r}-\overset{(j+1)}{\omega}(\tau)=0 \qquad (j=0,1,\dots) \quad (9)$$

wegen (8) und (3) zu

$$\mathfrak{r}_j(\tau)=\overset{(j)}{\omega}(\tau)\,\overset{(j)}{\mathfrak{n}}(\tau)+\overset{(j+1)}{\omega}(\tau)\,\overset{(j+1)}{\mathfrak{n}}(\tau), \qquad (j=0,1,\dots). \quad (10)$$

Da sich die Figur aus Evoluten nach $p=2q$ Schritten schliessen soll, gilt neben der Schliessungsbedingung (1) eine verallgemeinerte Parallelogrammbedingung

$$\sum_{j=0}^{2q-1}(-1)^j\,\mathfrak{r}_j(\tau)=\mathfrak{o}\ (\tau\in J)\,, \qquad (\mathrm{P})$$

die für $p=4$ mit der Parallelogrammbedingung zusammenfällt. Soll das p-Eck bei der Evolutenbildung genau einmal mit p-Schritten durchlaufen werden, so darf keine der Bedingungen

$$\sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^j\,\mathfrak{r}_j(\tau)=\mathfrak{o},\ (0<n<q,\ \tau\in J) \qquad (\mathrm{A})$$

erfüllt sein. Es ist unmittelbar einzusehen, dass nur solche natürlichen n von Bedeutung sind, die Teiler von q sind; d. h. es ist auszuschliessen, dass jede Ecke des p-Ecks r-mal gezählt wird.

Aus (1), (P) und (A) finden wir unter Berücksichtigung von (10) und (8) nach kurzer Rechnung die dazu äquivalenten Bedingungen:

$$\overset{(2q)}{\omega}(\tau)-(-1)^q\,\omega(\tau)=0 \qquad (1')$$

$$\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k\left(\overset{(2k)}{\omega}(\tau)+\overset{(2k+2)}{\omega}(\tau)\right)=0 \qquad (\mathrm{P}')$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\overset{(2k)}{\omega}(\tau)+\overset{(2k+2)}{\omega}(\tau)\right)=0,\ (0<n<q). \tag{A'}$$

Man sieht unmittelbar, dass (1′) und (P′) äquivalente Bedingungen sind. Es genügt also, die Lösungen ω von (P′) zu betrachten, die keiner Differentialgleichung aus (A′) genügen.

Für die Krümmungsradien r_j der Kurven $\mathfrak{r}_j$ gilt (siehe [3, 4]):

$$r_j(\tau)=\overset{(j)}{\omega}(\tau)+\overset{(j+2)}{\omega}(\tau),\ r_j(\tau)=\overset{(j)}{r_0}(\tau),\ (j=0,1,\dots). \tag{11}$$

Daher erfüllt der Krümmungsradius $r(\tau)$ einer beliebigen Kurve des Evoluten-p-Ecks bezogen auf den invarianten Parameter τ wegen (P′) die Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k\overset{(2k)}{r}(\tau)=0. \tag{12}$$

Unter den Lösungen von (12) sind wegen (A′) die Lösungen der Differentialgleichungen

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\overset{(2k)}{r}(\tau)=0,\ (0<n<q) \tag{13}$$

auszuschliessen. Insbesondere ist in (13) für $n=1$ die Bedingung enthalten, dass kein r_j eine Nullstelle auf J hat, d.h. dass an keiner Stelle $\tau\in J$ zwei benachbarte Ecken des Polygons zusammenfallen.

Die mit -1 genommenen Quadrate der Wurzeln der charakteristischen Gleichung zur Differentialgleichung (12) sind die von 1 verschiedenen q-ten Einheitswurzeln. Jedes $r_j(\tau)$ ist daher Linearkombination eines Fundamentalsystems von $2(q-1)$ Funktionen $e^{\beta\tau}\cos\gamma\tau$ und $e^{\beta\tau}\sin\gamma\tau$, die Lösungen von (12) sind. Berücksichtigen wir die Ausschlussbedingungen (13), wobei hier nur die Teiler n von q von Bedeutung sind, so kommen nur solche Krümmungsradien $r_j(\tau)$ in Frage, in denen mindestens eine der $2\varphi(q)$ Funktionen (φ ist die Eulersche Funktion):

$$e^{\beta_k\tau}\cos\gamma_k\tau,\ e^{\beta_k\tau}\sin\gamma_k\tau,\ e^{-\beta_k\tau}\cos\gamma_k\tau,\ e^{-\beta_k\tau}\sin\gamma_k\tau,$$

$$\beta_k=\cos\frac{2k-q}{2q}\pi,\ \gamma_k=\sin\frac{2k-q}{2q}\pi,\ \left((k,q)=1,0<k<\frac{q}{2}\right) \tag{14}$$

enthalten ist. Die Kurve $\mathfrak{r}_0$ ist durch $r_0(\tau)$ bis auf die Lage in der euklidischen Ebene bestimmt (siehe (24)). Aus der Äquivalenz der Bedingungen (12), (P′), (1′) und (1) folgt dann, dass sich das Evoluten-p-Eck mit der Ausgangskurve $\mathfrak{r}_0$ genau nach p-Schritten schliesst. Das p-Eck mit $p=2q$ hängt also von $2(q-1)$ (bis auf die obige Einschränkung) willkürlich wählbaren Konstanten ab. Wir erhalten daher:

Satz 1. *Es gibt zu jeder geraden Zahl $p \geq 4$ sich schliessende p-Ecke aus Evoluten. Die Krümmungsradien der Ausgangskurve und ihrer Evoluten erfüllen die Differentialgleichung* (12), *jedoch nicht die Differentialgleichungen* (13), *falls das p-Eck sich genau einmal nach p Evolutenbildungen schliesst. Die Evoluten-p-Ecke hängen von $p-2$ Konstanten ab.*

Aus (10), (8) und (P′) folgt, dass der Schwerpunkt des p-Ecks

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2q} \sum_{j=0}^{2q-1} \mathfrak{r}_j(\tau) \tag{15}$$

fest ist. Wegen der Parallelogrammbedingung (P) gilt dann:

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \mathfrak{r}_{2k}(\tau) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \mathfrak{r}_{2k+1}(\tau). \tag{16}$$

Satz 2. *Ein p-Eck ($p = 2\,q$) aus Evoluten hat einen festen Schwerpunkt $\mathfrak{m}$, der für jedes $\tau \in J$ Schwerpunkt der q einander zugeordneten Kurvenpunkte mit gerader bzw. ungerader Numerierung ist.*

Der Schwerpunkt $\mathfrak{m}$ des p-Ecks kann als Ursprung eines Koordinatensystems gewählt werden. Da der invariante Parameter in (5) nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, kann der Anfangswert des Richtungswinkels τ noch geeignet festgelegt werden. Durch diese Festlegungen ist ein euklidisches Koordinatensystem eindeutig bestimmt.

2. Im Fall $p=4$ erhalten wir aus (14) wegen $q=2$ für den Krümmungsradius $r(\tau)$ von $\mathfrak{r}_0$

$$r(\tau) = Ae^{\tau} + Be^{-\tau} \ (A, B \text{ konstant}). \tag{17}$$

Die Ausschlussbedingung (13) bedeutet, dass der Krümmungsradius $r(\tau)$ keine Nullstelle im Parameterintervall J haben darf.

Ist s die Bogenlänge der Kurve $\mathfrak{r}_0$, so erhalten wir wegen der bekannten Beziehung (siehe [2], Nr. 280):

$$\frac{ds}{d\tau} = r(\tau) \tag{18}$$

aus (17)

$$s - c = Ae^{\tau} - Be^{-\tau} \ (c \text{ konstant}). \tag{19}$$

Daher hat $\mathfrak{r}_0$ die natürliche Gleichung

$$r^2 - (s-c)^2 = d \ (d = 4AB). \tag{20}$$

Es sind demnach die drei Fälle zu unterscheiden:

a) $d=0$, b) $d<0$, c) $d>0$.

a) Für $d=0$ ist die Kurve $\mathfrak{r}_0$ eine logarithmische Spirale, für die $\mathfrak{m}$ in (15) asymptotischer Punkt ist und welche die von $\mathfrak{m}$ ausgehenden Strahlen unter dem Winkel $\pm\pi/4$ schneidet (siehe [2], Nr. 281). Die Evoluten $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ sind die logarithmischen Spiralen mit demselben asymptotischen Punkt $\mathfrak{m}$, die durch Drehung um $\mathfrak{m}$ mit den Drehwinkeln $k\pi/2$ ($k = 1,2,3$) aus $\mathfrak{r}_0$ hervorgehen. Dies kann durch

Rechnung bestätigt werden. Dazu hat man in (17) etwa $B=0$ und bei geeigneter Parametrisierung $A=1$ zu setzen. Das offene Intervall J ist $\mathbf{R}$.

Es sei bemerkt, dass dieses Evoluten-4-Eck aus logarithmischen Spiralen sowohl Vierteldrehungen in sich zulässt als auch die kontinuierliche Gruppe von Drehstreckungen, die die logarithmischen Spiralen zu Bahnkurven hat.

Die Krümmungsradien $r_j(\tau)$ $(\tau \in J)$ geben die mit Vorzeichen behafteten Längen der Polygonseiten an. Daher ist nach (11), (17) und (20) der Fall $d=0$ eines Evoluten-4-Ecks dadurch gekennzeichnet, dass für jedes $\tau \in J$ das Polygon zusammengehörender Kurvenpunkte ein Quadrat ist.

b) Im Fall $d<0$ setzen wir $d=-a^2$, $a>0$. Die Kurve $\mathfrak{r}_0$ ist dann eine Parazykloide (siehe [2], Nr. 285) mit der natürlichen Gleichung:

$$(s-c)^2 - r^2 = a^2 \ (c \text{ konstant}). \tag{21}$$

$a/2$ ist der Abstand der Spitze der Parazykloide vom festen Punkt $\mathfrak{m}$ in (15). Wählen wir die Parametrisierung (5) so, dass $\tau=0$ die Spitze der Parazykloide angibt, so folgt wegen $r(0)=0$ aus (17), (20) und (21) $A=-B=a/2$; also

$$r = a\,\mathrm{sh}\,\tau \ (\tau>0), \tag{22}$$

wobei es genügt, sich auf die Betrachtung des Intervalls $J=\mathbf{R}^+$ zu beschränken.

Nach (11) folgt wegen $r_1=\dot{r}$ unter Berücksichtigung von (17), (19), (20) und (22), dass die Evolute $\mathfrak{r}_1$ zu $\mathfrak{r}_0$ die natürliche Gleichung hat:

$$r_1^2 - (s_1 - c_1)^2 = a^2 \qquad (c_1 \text{ konstant}). \tag{23}$$

$\mathfrak{r}_1$ gehört daher zum Fall c) und ist eine Hyperzykloide (siehe [2], Nr. 285), die in $\tau=0$ einen Scheitel hat, der auf die Spitze der Parazykloide $\mathfrak{r}_0$ fällt.

Die Fälle b) und c) für Evoluten-4-Ecke sind also identisch. Die Figur liegt spiegelbildlich zum festen Punkt $\mathfrak{m}$ aus (15), der Mittelpunkt aller Rechtecke zusammengehörender Kurvenpunkte ist. Das Seitenverhältnis des Rechtecks für $\tau \in J$ ist $r{:}\dot{r} = \mathrm{th}\,\tau (\tau>0)$. Das Evoluten-4-Eck weist für $d \neq 0$ keine kontinuierliche Gruppe linearer Selbstabbildungen auf.

3. Geben wir insbesondere für ein beliebiges $p=2q\geq 4$ den Krümmungsradius $r(\tau)$ als Linearkombination der Funktionen (14) vor, so ist die Kurve $\mathfrak{r}(\tau)=(x(\tau), y(\tau))$ mit

$$\frac{dx}{d\tau} = r(\tau)\cos\tau, \ \frac{dy}{d\tau} = r(\tau)\sin\tau \tag{24}$$

Ausgangskurve $\mathfrak{r}_0$ eines sich schliessenden p-Ecks aus Evoluten. Auf dem zugrundeliegenden Intervall J darf kein Krümmungsradius r_j in (11) eine Nullstelle haben.

Hubert Frank, Freiburg i. Br.

LITERATURVERZEICHNIS:

1 M. Barner, *Géométrie différentielle de figures qui se ferment,* 2. Coll. de Géom. Diff., Liège 1961, CBRM (1962).

2 K. Fladt, *Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven,* Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt a. M. 1962.

3 G. Loria, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven,* Teubner Verlag, Leipzig 1902.

4 K. Strubecker, *Differentialgeometrie,* I. Sammlung, Göschen, Berlin 1955.