

# Ein ebenes Extremalproblem

Autor(en): **Wegner, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **32 (1977)**

Heft 5

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-32160>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Ein ebenes Extremalproblem

Bei verschiedenen Extremalproblemen erweist sich das reguläre  $n$ -Eck in einer gegebenen Polygonklasse als die optimale Lösung. So hat etwa das reguläre  $n$ -Eck unter allen, dem Einheitskreis einbeschriebenen konvexen  $n$ -Ecken maximalen Flächeninhalt und auch maximalen Umfang, und unter allen  $n$ -Ecken mit gegebenem Umfang (isoperimetrisches Problem) maximalen Flächeninhalt (vgl. hierzu L. FEJES TÓTH [2]). Dagegen führen Extremalprobleme, bei denen die Dicke eine Rolle spielt, nicht selten zu unerwartet irregulären Extremalkonfigurationen. Die Dicke einer konvexen Menge  $K$  in der Ebene ist wie folgt definiert. Ist  $\mathbf{u}$  ein Einheitsvektor, so wird der Abstand  $b(K, \mathbf{u})$  der beiden, zu  $\mathbf{u}$  orthogonalen Stützgeraden von  $K$  die *Breite* von  $K$  in Richtung  $\mathbf{u}$  genannt, und das über alle Richtungen erstreckte Infimum  $d(K) := \inf b(K, \mathbf{u})$  heisst die *Dicke* von  $K$ .

Wir wollen das folgende elementare Problem untersuchen, auf welches man übrigens bei der Betrachtung von Transversalenproblemen stösst (siehe J. ECKHOFF [1]):

Welche  $n$ -Ecke haben unter allen, dem Einheitskreis einbeschriebenen  $n$ -Ecken die grösstmögliche Dicke?

Wir gestatten dabei, dass Ecken zusammenfallen, d. h. wir lassen auch die  $k$ -Ecke mit  $k < n$  zur Konkurrenz zu. Somit ist das gesuchte Extremum

$$d_n := \sup d(K),$$

erstreckt über alle dem Einheitskreis einbeschriebenen  $k$ -Ecke  $K$  mit  $k \leq n$ , jedenfalls eine monoton nichtfallende Funktion von  $n$ .

Für ungerades  $n$  ist genau das reguläre  $n$ -Eck extremal, und damit ist in diesen Fällen  $d_n = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ ; dies bemerkte schon J. ECKHOFF [1] (und es folgt übrigens auch unmittelbar aus dem nachfolgenden Lemma 1). Für gerades  $n$  ist dagegen das reguläre  $n$ -Eck bereits im Falle  $n=4$  nicht mehr extremal, was schon daraus zu ersehen ist, dass die Dicke des Quadrats mit Kantenlänge  $\sqrt{2}$  kleiner ist als die Dicke  $\frac{3}{2}$  des gleichseitigen Dreiecks. Es zeigt sich, dass es überdies für gerades  $n$  eine ganze Schar von Extremalkonfigurationen gibt.

**Satz.** Sei  $n > 2$  gerade und  $\psi_n$  die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$\sin\left(\frac{\pi}{n-1} - \psi\right) - (n-1) \sin(n-1) \psi = 0$$

mit  $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2(n-1)}$ . Die maximale Dicke der dem Einheitskreis einbeschriebenen  $n$ -Ecke wird gegeben durch

$$d_n = \cos\left(\frac{\pi}{n-1} - \psi_n\right) + \cos(n-1) \psi_n$$

und sie wird angenommen von allen  $n$ -Ecken, die  $n-2$  aufeinanderfolgende Seiten mit dem Zentrumswinkel  $\beta_n = \frac{2\pi}{(n-1)} - 2\psi_n$  besitzen und deren übrige beiden Seiten (ebenfalls durch den Zentrumswinkel ausgedrückt) zwischen  $2(n-1)\psi_n$  und  $\frac{2\pi}{(n-1)} - 2\psi_n$  liegen.

Hält man also die  $n-1$  Ecken der  $n-2$  Maximalseiten fest, so kann die letzte Ecke an beliebiger Stelle eines Kreisbogens  $B$  der Länge  $\frac{2\pi}{(n-1)} - 2n\psi_n$  placiert werden. Abb. 1 zeigt einige Vierecke und Sechsecke maximaler Dicke, und die nachfolgende Tabelle gibt  $d_n$  für  $3 \leq n \leq 10$  näherungsweise wieder.<sup>1)</sup>

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_n$	1,5	1,53960	1,80901	1,81571	1,90096	1,90285	1,93969	1,94040

Es fällt auf, dass  $d_{2m} - d_{2m-1}$  sehr viel kleiner ausfällt als  $d_{2m+1} - d_{2m}$ . In der Tat kann man zeigen (was wir hier abe. nicht durchführen), dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{d_{2m} - d_{2m-1}}{d_{2m+1} - d_{2m}} = 0 \tag{1}$$

ist.

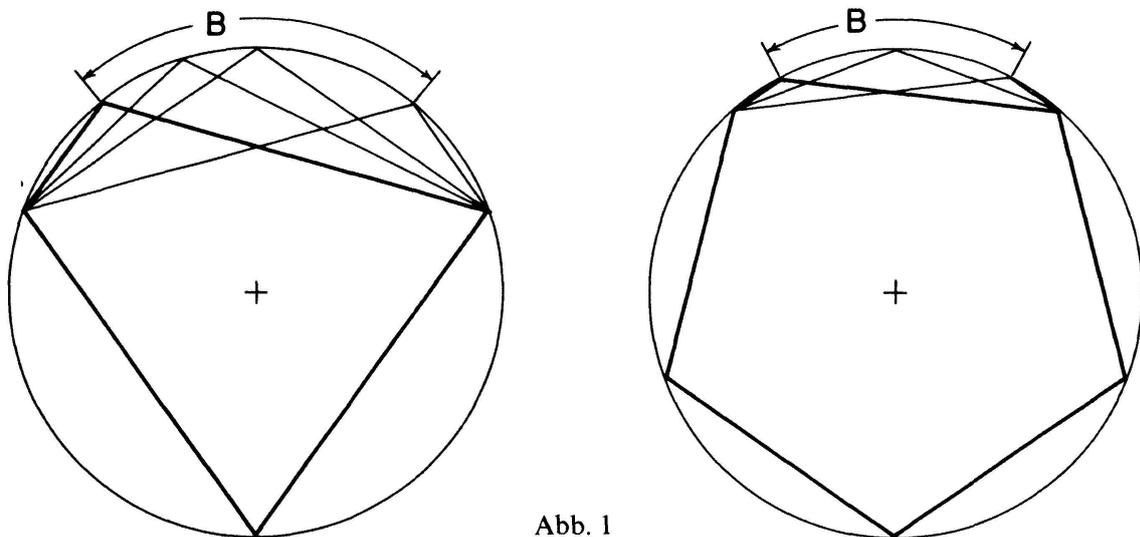


Abb. 1

Den Beweis des Satzes erbringen wir über einige Hilfsaussagen. Seiten der einbeschriebenen Polygone werden dabei stets durch den zugehörigen Zentrumswinkel gemessen, insbesondere sei  $a_n$  die Seitenlänge des regulären  $n$ -Ecks, also

$$a_n = \frac{2\pi}{n}$$

<sup>1)</sup> Es ist übrigens  $d_4 = \frac{8}{3\sqrt{3}}$  und  $d_6 = \frac{1}{10} \sqrt{190 + 58\sqrt{\frac{29}{5}}}$ .

**Lemma 1.** *Ist wenigstens eine Seite eines Polygons  $P$  grösser als  $a_{2m-1}$ , so ist seine Dicke  $d$  kleiner als  $d_{2m-1}$ .*

Denn ist  $s$  irgendeine Seite von  $P$  mit der Länge  $\sigma > a_{2m-1}$  und  $b(s)$  die Breite von  $P$  in der zu  $s$  orthogonalen Richtung, so gilt

$$d \leq b(s) \leq 1 + \cos \frac{\sigma}{2} < 1 + \cos \frac{\pi}{2m-1} = d_{2m-1},$$

womit die Behauptung folgt.

Unter einer *Sehnenkette*  $S$  wollen wir eine Folge von  $m$  Kreissehnen  $s_1, \dots, s_m$  verstehen derart, dass  $s_i$  und  $s_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ) einen Endpunkt gemeinsam haben und für die Längen  $\sigma_i$

$$\sigma_i \leq \sigma_1 \leq a_{2m-1} \text{ für } i = 2, \dots, m \quad (2)$$

gilt. Unter der *Breite*  $b(S)$  von  $S$  wollen wir die Breite orthogonal zu  $s_1$  verstehen (vgl. Abb. 2).

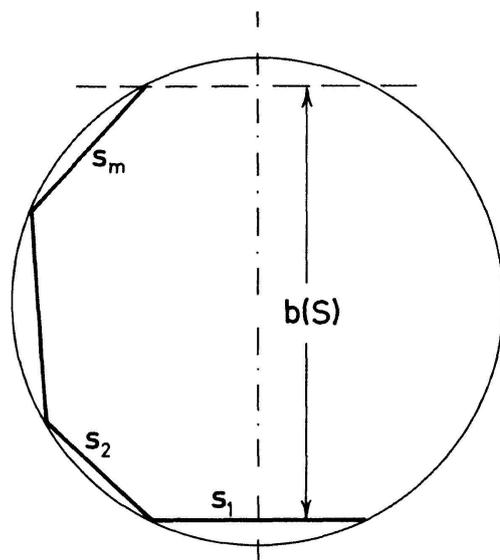


Abb. 2

Auf Grund der Nebenbedingungen (2) liegen alle Seiten  $s_2, \dots, s_m$  ganz auf einer Seite der Mittelsenkrechten zu  $s_1$  und danach ist die folgende Aussage unmittelbar ersichtlich:

**Lemma 2.** *Bei gegebenem  $\sigma_1 = a_{2m-1} - 2\psi$  ist  $b(S)$  genau dann maximal, wenn  $\sigma_1 = \sigma_i$  für alle  $i$  gilt, und  $b(S)$  wird dann gegeben durch*

$$b_{2m}(\psi) := \cos\left(\frac{\pi}{2m-1} - \psi\right) + \cos(2m-1)\psi.$$

Wegen  $0 \leq \sigma_1 \leq a_{2m-1}$  darf  $\psi$  in dem Bereich  $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2m-1}$  variieren und über das Maximum von  $b_{2m}(\psi)$  in diesem Bereich gibt das folgende Lemma Aufschluss.

**Lemma 3.**  $b_{2m}(\psi)$  hat in  $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2m-1}$  eine eindeutig bestimmte Maximalstelle  $\psi_{2m}$  und zwar gilt

$$0 < \psi_{2m} < \frac{\pi}{2m(2m-1)}.$$

Da jedenfalls  $b_{2m}(\psi) \leq 1 < b_{2m}(0) = d_{2m-1}$  für  $\frac{\pi}{2(2m-1)} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2m-1}$  gilt, liegt die gesuchte Maximalstelle im Intervall  $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2(2m-1)}$ . In diesem Intervall ist aber  $b'_{2m}(\psi)$  streng monoton fallend sowie  $b'_{2m}(0) > 0$  und  $b'_{2m}\left(\frac{\pi}{2m(2m-1)}\right) < 0$ , woraus die Behauptung folgt.

*Bemerkung.* Mit etwas mehr Mühe erhält man  $\psi_{2m} < \frac{\pi}{(2m-1)^3}$ , womit sich (1) beweisen lässt.

Nunmehr können wir den behaupteten Satz beweisen. Es ist klar, dass die Dicke eines Polygons realisiert wird durch die Breite orthogonal zu einer seiner Seiten. Daher steht auf Grund der obigen Lemmata zunächst einmal fest, dass die im Satz angegebenen Polygone wirklich die Dicke  $d_{2m}$  besitzen, denn für diese ist die Breite orthogonal zu den  $n-2$  Maximalseiten gleich  $d_{2m}$  und die Breite orthogonal zu den übrigen beiden Seiten höchstens grösser als  $d_{2m}$ . Es bleibt zu zeigen, dass die Dicke eines beliebigen, dem Einheitskreis einbeschriebenen Polygons mit höchstens  $2m$  Ecken nicht grösser als  $d_{2m}$  sein kann. Sei  $\sigma$  die maximale Seitenlänge von  $P$ . Ist  $\sigma > a_{2m-1}$ , so ist die Dicke von  $P$  nach Lemma 1 kleiner als  $d_{2m-1}$  (und damit kleiner als  $d_{2m}$ ). Sei also  $\sigma \leq a_{2m-1}$  und  $s_1$  eine Maximalseite von  $P$ . Nach Lemmata 2 und 3 ist dann die Breite von  $P$  orthogonal zu  $s_1$  kleiner als  $d_{2m}$ , wenn nicht  $\sigma = \beta_{2m}$  ist und wenigstens eine der beiden, aus den Seiten von  $P$  gebildeten Sehnenketten mit Anfangsglied  $s_1$  aus lauter Maximalseiten besteht. Also bleibt der Fall zu betrachten, dass  $\sigma = \beta_{2m}$  und jede maximale Seite das Anfangsglied einer Kette von  $m$  maximalen Seiten ist. Hierdurch werden aber gerade die oben betrachteten Polygone maximaler Dicke charakterisiert: Eine Kette aus Maximalseiten, die von Seiten kleinerer Länge begrenzt wird, besteht dann nämlich aus mindestens  $2m-2$  Mitgliedern, andernfalls enthielte sie wenigstens eine Seite, die nicht Anfangsglied einer Kette von  $m$  Maximalseiten ist. Da eine solche Kette höchstens zwei Seiten übriglässt, hängen die Maximalseiten alle zusammen, und die Längen der verbleibenden Seiten genügen den im Satz genannten Ungleichungen, da keine von ihnen grösser als  $\sigma$  sein kann. Damit ist der Satz bewiesen.

Dietrich Kramer und Gerd Wegner, Universität Dortmund

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 J. ECKHOFF, *Transversalenprobleme vom Gallaischen Typ*, Diss., Göttingen 1969.
- 2 L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Berlin 1972 (2. Aufl.).