# Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **32 (1977)**

Heft 4

PDF erstellt am: **22.09.2024**

# Aufgaben

**Aufgabe 769.** In einer Ebene $\varepsilon$ seien 3 Punkte $A_1, A_2, A_3$ gegeben. Es gibt genau zwei gleichwinklige Kreisbogendreiecke in $\varepsilon$ mit den Ecken $A_i$ und Winkeln $a_i = a$, $0 \leq a < \pi$. Man bestimme die Kugel $K$ mit Zentrum in $\varepsilon$ so, dass bei der stereographischen Projektion von $\varepsilon$ auf $K$ jene beiden Dreiecke in zwei kongruente, gleichseitige Kreisbogendreiecke abgebildet werden.

C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung des Aufgabenstellers: Ist $C$ der Kreis (oder die Gerade) durch $A_1, A_2, A_3$, so sind die Seiten jener Dreiecke in $\varepsilon$ die Kreisbögen $A_iA_k$, die mit $C$ die Winkel $(\pi - a)/2$ bilden und entweder alle innerhalb oder alle ausserhalb $C$ liegen.
Sind nun $A_i'$ die stereographischen Bilder der Punkte $A_i$ auf der Kugel $K$, $i = 1, 2, 3$, so werden sie, als Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, durch eine geeignete Drehung der Kugel zyklisch vertauscht. Dieser Drehung entspricht in der Ebene $\varepsilon$ eine Möbius-Transformation, welche die Punkte $A_i$ zyklisch vertauscht. Die Fixpunkte $F_1, F_2$ dieser Transformation ergeben sich, wenn man den speziellen, aber kreisverwandtschaftlich äquivalenten Fall eines gleichseitigen Dreiecks $A_1A_2A_3$ betrachtet (wo sie der Umkreismittelpunkt und der unendlich ferne Punkt sind), folgendermassen: $F_1$ und $F_2$ sind die gemeinsamen Punkte dreier Kreise $k_1, k_2, k_3$, von denen jeder durch eine Ecke $A_i$ geht und orthogonal zu dem durch die beiden anderen Ecken bestimmten Kreisbüschel ist.
Ist nun $C^*$ der Kreis über dem Durchmesser $F_1F_2$, so muss eine zu $F_1F_2$ normale Sehne von $C^*$ Durchmesser der gesuchten Kugel sein, damit die Bilder $F_1' F_2'$ Endpunkte der Drehachse von $K$ werden. Aus der geforderten Kongruenz der Bilddreiecke folgt nun, dass das Bild $C'$ von $C$ ein Grosskreis von $K$ sein muss. Jene Sehne von $C^*$ muss also zugleich Sehne von $C$ sein und ist damit eindeutig festgelegt.

Eine weitere Lösung sandte A. Reuschel (Wien, Österreich).

**Aufgabe 770.** Let $\lambda$ be an integer $\geq 1$. A positive integer $n$ is called $\lambda$-perfect, if $\sigma(n) = 2\lambda n$, where $\sigma(n)$ denotes the sum of all positive divisors of $n$. Prove the following results for odd $\lambda$-perfect numbers:

(i) If $\lambda$ is odd, then any odd $\lambda$-perfect number is of the form $p^a k^2$, where $p$ is a prime $\equiv 1 \pmod 4$, $a \equiv 1 \pmod 4$ and $(p, k) = 1$.

(ii) If $\lambda$ is odd and $\not\equiv 0 \pmod 3$, then any odd $\lambda$-perfect number is of the form $12t + 1$ or $36t + 9$.

(iii) If $n$ is of the form $12t + 1$, then $n = p^a k^2$ with $p$ prime and $\equiv 1 \pmod{12}$ and $a \equiv 1$ or $9 \pmod{12}$.

D. Suryanarayana, Waltair, India

Solution: ($i$) Let $n=p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$ (canonical factorization). Then

$$\prod_{i=1}^{r}(1+p_i+\cdots+p_i^{a_i})=2\lambda\prod_{i=1}^{r}p_i^{a_i}. \tag{1}$$

Since $\lambda$ and $n$ are odd, exactly one of the factors on the left of (1) is even. This implies that one of the $a_i$ is odd while the other $a_i$ are even, and so $n=p^a k^2$ where $a$ is odd and $(p,k)=1$. Now $\sigma(p^a)=1+p+\cdots+p^a$ has only one factor 2. Since $a$ is odd, we have $1+p+\cdots+p^a=(1+p)(1+p^2+\cdots+p^{a-1})$, hence $1+p=2m$ with $m$ odd, and this implies $p\equiv 1 \pmod 4$. Moreover $2\nmid(1+p^2+\cdots+p^{a-1})$, hence $(a-1)/2$ must be even, and so $a\equiv 1 \pmod 4$.

(ii) According to (i), let $n=p^a k^2$, $p\equiv 1 \pmod 4$, $a\equiv 1 \pmod 4$, $(p,k)=1$. Furthermore we have the additional assumption $\lambda\not\equiv 0 \pmod 3$. First consider the case $n\equiv 0 \pmod 3$. Then $n=9p^a q^2$, where $q$ is odd. Therefore $p^a q^2\equiv 1 \pmod 4$ and so $n\equiv 9 \pmod{36}$. Next, let $n\not\equiv 0 \pmod 3$. Obviously $p\equiv 1 \pmod{12}$ or $p\equiv 5 \pmod{12}$. In the latter case we would have $p\equiv -1 \pmod 3$, hence $3\mid\sigma(n)=(1+p+\cdots+p^a)\,\sigma(k^2)$, a contradiction. Thus $p$ and $p^a$ are both $\equiv 1 \pmod{12}$. Together with $k\not\equiv 0 \pmod 3$ this leads to $n\equiv 1 \pmod{12}$.

(iii) Let $n\equiv 1 \pmod{12}$, $\lambda\not\equiv 0 \pmod 3$. We know from (ii) that $p\equiv 1 \pmod{12}$, hence $p\equiv 1 \pmod 3$. Therefore $\sigma(p^a)=1+p+\cdots+p^a\equiv a+1\equiv 1$ or $2 \pmod 3$, i.e. $a\equiv 0 \pmod 3$ or $a\equiv 1 \pmod 3$. Combining this with $a\equiv 1 \pmod 4$, we arrive at $a\equiv 9 \pmod{12}$ or $a\equiv 1 \pmod{12}$.

P. Kiss, Eger (Ungarn), and L. Kuipers (Mollens VS)

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD) und P. Turnheer (Zürich).

**Aufgabe 771.** Es seien $a_i (i=1, 2, 3)$ die Seitenlängen eines beliebigen ebenen Dreiecks. Man beweise die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{3}(a_i/a_{i+1})>\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}1/a_i^2\right)^{1/2}\quad(a_4=a_1).$$

J. Brejcha, Brno, ČSSR

Solution: If $\Omega$ denotes a Brocard point of triangle $ABC$, then $B\Omega=(2R\sin\omega)\,b/c$, etc. Since also

$$(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2=4\Delta^2/\sin^2\omega,$$

the given inequality can be rewritten as

$$2(A\Omega+B\Omega+C\Omega)>4(a+b+c)\Delta R/abc=a+b+c.$$

(Here, $a$, $b$, $c$, $R$, $\Delta$ and $\omega$, respectively, denote the sides of the triangle, circumradius, area and Brocard angle.) The latter inequality is now an immediate consequence of the basic triangle inequality, since for any point $P$: $BP+CP>a$, $CP+AP>b$, $AP+BP>c$.

Remark: The solution is similar to the author's proof of an asymmetric cyclic inequality of A.W. Walker (see Asymmetric triangle inequalities, Publications de la Faculté d'Electrotechnique de l'Université de Belgrade, No. 366, 1971, p. 41-42).

M. S. Klamkin, Edmonton, Alberta, Canada

Weitere Lösungen sandten G. Bercea (München, BRD), I. Paasche (München, BRD) (Teillösung) und M. Vowe (Therwil BL) (Teillösung).

**Aufgabe 772.** Sei $a\geq 1$ ganzzahlig und die Folge $(R_k)_{k=0,1,\ldots}$ rekursiv definiert durch

$$R_0=0, \qquad R_1=1, \qquad R_k=aR_{k-1}+R_{k-2} \quad \text{für} \quad k\geqq 2.$$

Man beweise

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{R_{2^i}}=1+\frac{a}{2}+\frac{2}{a}-\frac{1}{2}(a^2+4)^{1/2}$$

und damit die Irrationalität dieser Reihe.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Lösung: Die zur Rekursionsformel gehörige charakteristische Gleichung $t^2-at-1=0$ hat die Wurzeln

$$p=\frac{1}{2}\left(a+(a^2+4)^{1/2}\right), \qquad q=\frac{1}{2}\left(a-(a^2+4)^{1/2}\right).$$

Es ergibt sich in geläufiger Weise

$$R_k=\frac{p^k-q^k}{p-q}; \qquad k>0.$$

Mit $p+q=a, pq=-1$ wird

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{R_{2^i}}=(p-q)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{p^{2^i}-q^{2^i}}=1+(p-q)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{q^{2^i}}{1-q^{2^{i+1}}}.$$

Wegen $|q|=1/|p|<1$ dürfen wir die für $|x|<1$ gültige Identität

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^{2^{i-1}}}{1-x^{2^i}}=\frac{x}{1-x}$$

benutzen.

Es ergibt sich

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{R_{2i}} = 1 - \left(\frac{1}{q} + q\right)\left(\frac{q}{1-q} - \frac{q}{1-q^2}\right) = 1 + \frac{2+aq}{a}$$

$$= 1 + \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - \frac{1}{2}(a^2+4)^{1/2}.$$

M. Vowe, Therwil BL

Weitere Lösungen sandten G. Bercea (München, BRD), K. Bickel (Freiburg, BRD), C. Bindschedler (Küsnacht), J.C. Binz (Bern), J.T. Groenmann (Groningen, NL), L. Hämmerling (Aachen, BRD), H. Harborth (Braunschweig, BRD), P. Kiss (Eger, Ungarn), L. Kuipers und V.E. Hoggatt (Mollens VS und San José, USA), O.P. Lossers (Eindhoven, NL) und E. Teuffel (Korntal, BRD).

# Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Februar 1978* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

**Aufgabe 789.** Es sei $n$ ganz und nichtnegativ. Man zeige, dass sich $4^n$ auf unendlich viele Arten als Differenz einer Quadratzahl und einer Trigonalzahl darstellen lässt. Ferner soll die Gesamtheit aller derartigen Darstellungen für den Fall angegeben werden, dass $2 \cdot 4^{n+1} - 1$ eine Primzahl (Mersennesche Primzahl) ist.

E. Trost, Zürich

**Aufgabe 790.** Es sei $S_k(n) := 1^k + 2^k + \cdots + n^k$; $k, n \in \mathbf{N}$. Man bestimme alle $k \in \mathbf{N}$, für die folgende Aussage zutrifft: Es gibt ein Polynom $P$ mit rationalen Koeffizienten sowie eine natürliche Zahl $m \geq 2$ derart, dass für alle $n \in \mathbf{N}$: $S_k(n) = [P(n)]^m$.

O. Buggisch, Darmstadt, BRD

**Aufgabe 791.** Es sei $t$ eine Tangente an die Ellipse, welche die Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ in ihren Mittelpunkten berührt (Steinersche Inellipse). Ferner seien $K_1, K_2, K_3$ drei Kegelschnitte, von denen jeder zwei Seiten des Dreiecks in den Endpunkten der dritten Seite sowie die Gerade $t$ berührt. Je zwei dieser drei Kurven schneiden sich ausser in einer Ecke $A_i$ noch in genau einem weiteren reellen Punkt $S_i$. Man zeige, dass die Geraden $A_iS_i$, $i = 1, 2, 3$, parallel sind.

C. Bindschedler, Küsnacht