

# Eine Bemerkung zum Satz von Pick

Autor(en): **Walther, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **32 (1977)**

Heft 3

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-32154>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

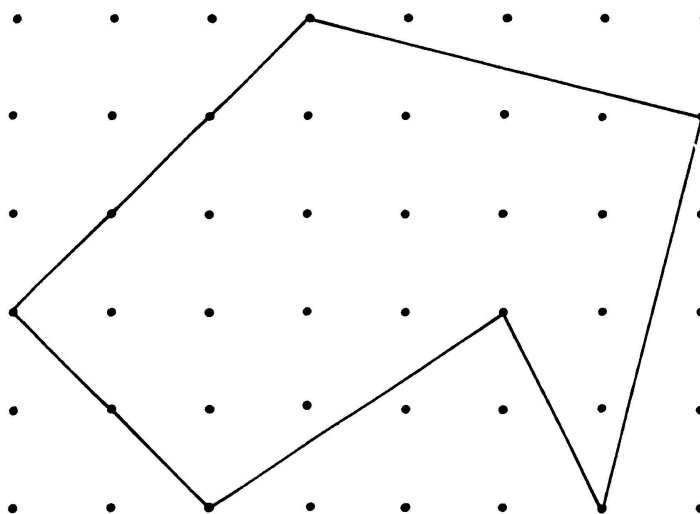
### Eine Bemerkung zum Satz von Pick

Der Flächeninhalt  $F(P)$  eines einfachen Polygons der Gitterebene lässt sich nach einem Satz von Pick in folgender Weise bestimmen:

$$F(P) = \frac{r}{2} + i - 1, \quad (1)$$

dabei bedeuten  $r$  bzw.  $i$  die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand bzw. im Inneren des Polygons.

Beispiel:



Figur 1

$r=9, \quad i=17$

Neben und in Verbindung mit dem didaktischen Interesse, das dieser elementare Satz der kombinatorischen Geometrie wegen seiner mannigfachen Anwendungsmöglichkeiten und als Quelle vielfältiger Aktivitäten (z. B. Geobrett) auf sich lenkt, geht aus der Literatur<sup>1)</sup> auch ein gewisses mathematisches Interesse an der obigen Aussage hervor, was sich in immer neuen Beweisvarianten niederschlägt. Auch in der vorliegenden Note wird ein neuer Weg zur Pickschen Formel angegeben.

Der Unterschied zu den bisherigen Beweisen von (1) – ohne diese hier im einzelnen zu analysieren und zu vergleichen – besteht grob gesagt darin, dass weder der Satz von Euler, noch zahlentheoretische Hilfsmittel oder Eigenschaften des Flächenmasses (z. B. Additivität) benutzt werden, die jedoch bei jenen Arbeiten eine wichtige Rolle spielen. Die entscheidende Bedingung, die dem folgenden Beweis zugrunde liegt, ist die geeignete Triangulierbarkeit einfacher Polygone.

In einem ersten Schritt werde das gegebene Polygon  $P$  durch «Diagonalen» so in Dreiecke zerlegt, dass sämtliche Gitterpunkte auf dem Rand von  $P$  Ecken der entsprechenden Dreiecke werden<sup>2)</sup>.

1) Vgl. Gaskell, Klamkin, Watson (1976) und die dort angegebene Bibliographie.

2) Zur Existenz einer solchen Triangulation vgl. Meschkowski (1966), S.43f.

Bezeichnet  $k_i$  bzw.  $k_g$  die Zahl jener Diagonalen (oder inneren Kanten von  $P$ ) bzw. die Gesamtzahl der Kanten, so gilt

$$k_g = k_i + r. \quad (2)$$

Da jeweils zwei verschiedene Dreiecke an genau einer gemeinsamen inneren Kante aneinanderstossen, ergibt sich für die Zahl der Dreiecke

$$n = k_i + 1. \quad (3)$$

Dieses Resultat lässt sich im übrigen noch durch eine andere Überlegung begründen. Ordnet man nämlich jedem Dreieck einen (z. B. in seinem Inneren) gelegenen Punkt zu, und verbindet zwei solche Punkte durch eine Linie genau dann, wenn die beiden Dreiecke benachbart sind, so erhält man einen Baum im Sinne der Graphentheorie mit  $n$  Punkten und  $k_i$  Kanten. (Im Inneren von  $P$  treten noch keine Ecken von Dreiecken auf!) Für Bäume gilt aber die Beziehung (3) allgemein.

Die Zahl der Dreiecke ermöglicht schliesslich eine Aussage über die Gesamtzahl der Kanten  $k_g$ :

$$3n + r = 2k_g. \quad (4)$$

Der Term  $3n$  zählt zunächst nur die inneren Kanten von  $P$  doppelt; um das Doppelte sämtlicher Kanten zu erhalten, ist  $3n$  noch um die Zahl  $r$  der Randkanten zu vermehren.

Eliminiert man aus (2), (3), (4) die Zahlen  $k_i$  und  $k_g$ , so ergibt sich eine einfache Beziehung zwischen der Zahl der Dreiecke und der Zahl der Gitterpunkte auf dem Rand von  $P$ :

$$n = r - 2. \quad (5)$$

Blickt man auf die bisherigen Ausführungen zurück, so wird man bemerken, dass diese rein kombinatorischer Natur waren und somit auch für entsprechende Graphen gelten.

Kehren wir nun wieder zurück zu unserem ursprünglichen Polygon in der Gitterebene. Bei der oben beschriebenen Triangulierung kann es natürlich passieren, dass weitere Gitterpunkte, die  $P$  im Inneren enthält, auf inneren Kanten oder innerhalb von Dreiecken liegen (vgl. Beispiel in Fig. 2).

Unser nächstes Ziel ist es, die Triangulierung so zu verfeinern, dass die entstehenden «Elementardreiecke» ausser an den Ecken keine weiteren Gitterpunkte auf dem Rand oder im Inneren enthalten, und dabei die Veränderung der Relation (5) zu verfolgen.

Wird die Verfeinerung der Triangulierung so vorgenommen, dass sukzessive jeweils ein weiterer, noch nicht erfasster Gitterpunkt im Inneren Ecke von neuen Dreiecken wird, so erhöht sich dabei die rechte Seite von (5) um jeweils 2; und zwar unabhängig davon, ob der betreffende Gitterpunkt auf dem Rande oder im Inneren eines Dreiecks liegt (vgl. Beispiel in Fig. 2). Bei  $i$  Gitterpunkten im Inneren von  $P$  folgt aus (5) die allgemeinere Beziehung

$$n = r - 2 + 2i. \quad (6)$$

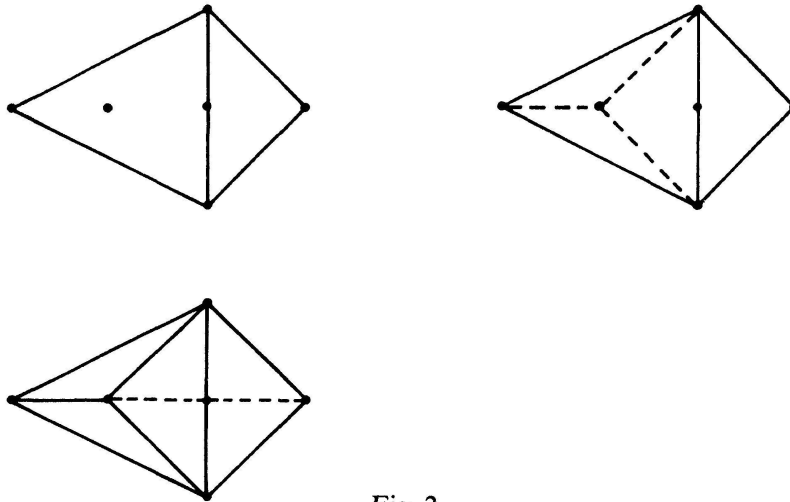


Fig. 2

Anmerkung: Durch Elimination von  $n$  aus (4) und (6) ergibt sich der von Funkenbusch (1974) angegebene Kantensatz

$$k_g = 3i + 2r - 3.$$

Aus (6) ergibt sich unmittelbar der Satz von Pick, wenn man davon ausgeht, dass jedes Elementardreieck den Flächeninhalt  $1/2$  hat:

$$F(P) = \frac{1}{2}n = \frac{r}{2} + i - 1.$$

Auch für jene Annahme ist eine ganze Reihe mehr oder weniger elementarer Beweise bekannt.

Gaskell, Klamkin und Watson (1976) haben einen sehr eleganten Beweis angegeben, der die Formel (6) benutzt und hier kurz skizziert werden soll.

Sei  $D$  ein Elementardreieck. Wegen der Translationsinvarianz des Flächeninhalts können wir o.B.d.A. annehmen, dass die Ecken von  $D$  die Koordinaten  $(0, 0)$ ,  $(t, u)$ ,  $(v, w)$  besitzen.

Die Fläche  $F(D)$  ist dann

$$F(D) = \frac{1}{2} |tw - uv|,$$

und wegen der Ganzzahligkeit der Koordinaten gilt  $F(D) \geq 1/2$ . Nun schliessen wir  $D$  in ein Rechteck  $R$  mit Seitenlängen  $p, q$  so ein, dass die längste Seite von  $D$  Diagonale von  $R$  ist, und die Rechtecksseiten auf Gittergeraden liegen. Für ein solches Rechteck ist

$$i = (p-1)(q-1), \quad r = 2p + 2q,$$

und somit ergibt sich für die Zahl der Elementardreiecke nach vollständiger Triangulierung von  $R$ :

$$n = r - 2 + 2i = 2p + 2q - 2 + 2(p-1)(q-1) = 2pq.$$

Die Fläche von  $R$  wäre demnach mindestens  $pq$ , andererseits gilt aber für ein Rechteck mit Seiten  $p, q$  exakt  $F(R) = pq$ . Also muss die Fläche eines Elementardreiecks genau  $1/2$  sein.

G. Walther, PH Ruhr, Dortmund

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 W.W. Funkenbusch: From Euler's formula to Pick's formula using an edge theorem. Amer. Math. Monthly 81, 647-648 (1974).
- 2 R.W. Gaskell, M.S. Klamkin und P. Watson: Triangulations and Pick's Theorem. Mathematics Magazine 49, 35-37 (1976).
- 3 M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik I. Stuttgart 1973.
- 4 H. Meschkowski: Grundlagen der euklidischen Geometrie. Mannheim 1966.

### Minimale Gitterwege mit Nebenbedingungen

In einem ebenen Gitter betrachten wir Gitterwege minimaler Länge von  $(0, 0)$  nach  $(n, m)$ , wo  $n$  und  $m$  natürliche Zahlen bedeuten. Alle solchen Wege bestehen aus  $n$  horizontalen und  $m$  vertikalen Einheitsstrecken und haben die Länge  $n+m$ . Ihre Anzahl beträgt daher

$$z(n, m) = \binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}.$$

Fordern wir zusätzlich, dass die zulässigen Wege die Gerade  $g: ky - x = 0$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) nicht überschreiten dürfen, so vermindert sich deren Anzahl um die Zahl  $v(n, m)$  der Wege, welche  $g$  überschreiten. Die Anzahl der zulässigen Wege wird dann  $z^*(n, m) = z(n, m) - v(n, m)$ .

Offensichtlich ist  $z^*(n, m) = 0$  für  $n < km$ ; im folgenden sei deshalb  $n \geq km$  vorausgesetzt.

In [1] stellt M. Jeger die Lösung des Problems für  $k = 1$  mit Hilfe einer Spiegelungs-idee von D. André [3] auf eine sehr instruktive Art dar; für  $k > 1$  versagt das Spiegelungsverfahren, doch beweist er die Gültigkeit einer vermuteten Formel aufgrund der Randwerte 0 auf der Geraden  $ky - x - 1 = 0$  und der Randwerte 1 auf der  $x$ -Achse mit Hilfe einer Rekursionsformel. In [2] findet sich dann die Lösung mit Verwendung formaler Potenzreihen. Wir stellen uns die Aufgabe,  $z^*(n, m)$  direkt mit einer kombinatorischen Idee zu bestimmen. Dazu genügt es, die Anzahl  $v(n, m)$  der verbotenen Wege zu berechnen.

Es bedeuten  $V$  die Menge der verbotenen Wege von  $(0, 0)$  nach  $(n, m)$  und  $M$  die Menge aller Minimalwege von  $(0, 0)$  nach  $(n+1, m-1)$ . Jeden Weg aus  $V$  identifizieren wir mit einer  $(n+m)$ -stelligen Folge mit  $n$  Gliedern «1» und  $m$  Gliedern « $-k$ », wo jede 1 für eine horizontale und jedes Glied  $-k$  für eine vertikale Einheitsstrecke des Weges steht. Jeder solchen Folge  $f = (x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$  ordnen wir die «Partialsommen»

$$s_0(f) = 0, s_v(f) = \sum_{i=1}^v x_i$$