ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

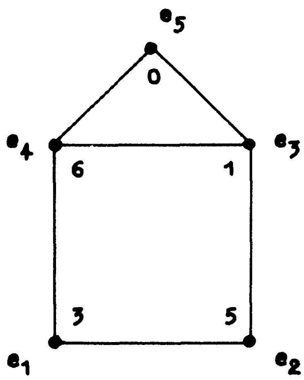
El. Math. | Band 32 | Heft 3 | Seiten 49-80 | 10. Mai 1977

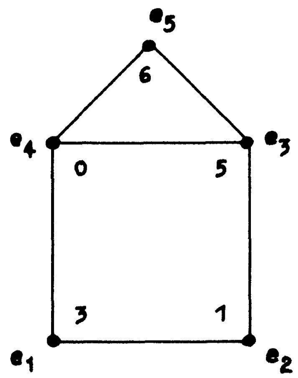
Über graziöse Numerierungen von Graphen

In der Theorie der Numerierung von Graphen[1]) geht man nach [1] und [2] von endlichen, schlichten, zusammenhängenden, ungerichteten Graphen[2]) $G=(E,K)$ aus und ordnet mittels beliebiger Vorschriften f bzw. g den $n=|E|$ Ecken von G nicht negative ganze Zahlen bzw. den $k=|K|$ Kanten von G positive ganze Zahlen zu. Geht man speziell von einer injektiven Abbildung f: $E\to\{0,1,\ldots,k\}$ aus und definiert dann mittels f die Abbildung

$$g:\begin{cases} K\to\{1,2,\ldots,k\}\\ \{e,e'\}\to|f(e)-f(e')|\,,\end{cases}$$

so ergibt sich die interessante Frage, ob es Graphen gibt, deren Ecken mittels einer injektiven Abbildung f so numeriert werden können, dass die Abbildung g bijektiv ist. Wie schon in [2] gezeigt, ist diese Frage zu bejahen. Graphen, deren Ecken und Kanten sich mittels der speziell definierten Abbildungen numerieren lassen, heissen nach [1] und [2] graziös. Die durch f hervorgerufene Numerierung der Ecken graziöser Graphen nennen wir im folgenden kurz graziöse Numerierung. Die Figur 1a zeigt den graziösen Graphen $G=(E,K)$ mit $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$,





Figur 1

[1]) Wir verstehen hier unter einem Graphen G das geordnete Paar $G=(E,K)$, wobei E eine beliebige Menge und $K\subset\mathfrak{P}_2(E)=\{\{e,e'\}\mid e,e'\in E, e\neq e'\}$ bedeuten.

[2]) Zur Definition der graphentheoretischen Grundbegriffe vergleiche man etwa [3], [4] und [5].

$K=\{\{e_1,e_2\},\{e_1,e_4\},\{e_2,e_3\},\{e_3,e_4\}.\{e_3,e_5\},\{e_4,e_5\}\}$,

$$f\colon \begin{cases} E\to\{0,1,\dots,6\} \\ e_1\to 3 \\ e_2\to 5 \\ e_3\to 1 \\ e_4\to 6 \\ e_5\to 0 \end{cases} \qquad g\colon \begin{cases} K\to\{1,2,\dots,6\} \\ \{e_1,e_2\}\to 2 \\ \{e_2,e_3\}\to 4 \\ \{e_3,e_4\}\to 5 \\ \{e_1,e_4\}\to 3 \\ \{e_3,e_5\}\to 1 \\ \{e_4,e_5\}\to 6 \end{cases}$$

Ist ein Graph graziös, so gibt es stets mindestens zwei zugehörige verschiedene graziöse Numerierungen. Zum Nachweis dieser Aussage gehen wir von einem graziösen Graphen $G=(E,K)$ mit einer zugehörigen Injektion

$$f\colon \begin{cases} E\to\{0,1,\dots,k\} \\ e\to f(e) \text{ für alle } e\in E \end{cases}$$

und der induzierten Bijektion

$$g\colon \begin{cases} K\to\{1,2,\dots,k\} \\ \{e,e'\}\to |f(e)-f(e')| \text{ für alle } \{e,e'\}\in K \end{cases}$$

aus und definieren zwei neue Abbildungen f' und g' mit

$$f'\colon \begin{cases} E\to\{0,1,\dots,k\} \\ e\to k-f(e) \text{ für alle } e\in E \end{cases}$$

und

$$g'\colon \begin{cases} K\to\{1,2,\dots,k\} \\ \{e,e'\}\to |f'(e)-f'(e')| \text{ für alle } \{e,e'\}\in K. \end{cases}$$

Man erkennt dann unmittelbar, dass f' injektiv ist und $g'=g$ ist. Die durch f' hervorgerufene graziöse Numerierung von G nennen wir komplementär zu der von f bestimmten Numerierung. In Figur 1b ist die zur Figur 1a komplementäre Numerierung angegeben.

Bezeichnet nun Γ die Menge aller endlichen, schlichten, zusammenhängenden, ungerichteten Graphen, so besteht nun in der Theorie der graziösen Graphen die Hauptaufgabe in der Bestimmung möglichst grosser Teilklassen graziöser Graphen von Γ.

In der vorliegenden Note wollen wir uns nun unter Verwendung der in [1] und [2] gewonnenen Ergebnisse der Bestimmung von vier Klassen graziöser Graphen aus Γ zuwenden. Dazu benutzen wir entscheidend die in [1] bewiesene Tatsache, dass ein Kreis $C_k=(E,K)$ der Länge k mit $E=\{e_0,e_1, \ldots, e_{k-1}\}$, $K=\{\{e_i,e_{i+1}\}\mid i=1, 2, \ldots, k-2\}\cup\{e_0,e_{k-1}\}$ und $k\geq 3$ genau dann graziös ist, wenn $k\equiv 0$ (4) oder $k\equiv 3$ (4) gilt. Zur Bestimmung der oben schon erwähnten vier Klassen graziöser Graphen aus Γ beschränken wir uns nun auf Kreise $C_k=(E,K)$ mit $k\equiv 0\,(4)$. Nach [1] ergibt die folgende injektive Abbildung f mit

$$f\colon \begin{cases} E\to\{0,1,\ldots,k\} \\ e_\mu \to \sum\limits_{i=0}^{\mu-1}(-1)^i a_{k-1-i} \text{ für } \mu=0,1,\ldots,k-1 \end{cases}$$

eine graziöse Numerierung von C_k. Hierbei sind die a_i positive ganze Zahlen mit

$$a_i=i \text{ für } i=1,2,\ldots,\frac{k}{2}-1$$

$$a_i=i+1 \text{ für } i=\frac{k}{2},\ \frac{k}{2}+1,\ldots,k-1.$$

Daraus ergibt sich

$$\text{(i)}\ f(e_\mu)=\begin{cases} \dfrac{\mu}{2}, \text{ falls } \mu \text{ gerade} \\ k-\dfrac{\mu-1}{2}-\left[\dfrac{2\mu}{k+2}\right], \text{ falls } \mu \text{ ungerade.} \end{cases}$$

sowie die zu f komplementäre Numerierung

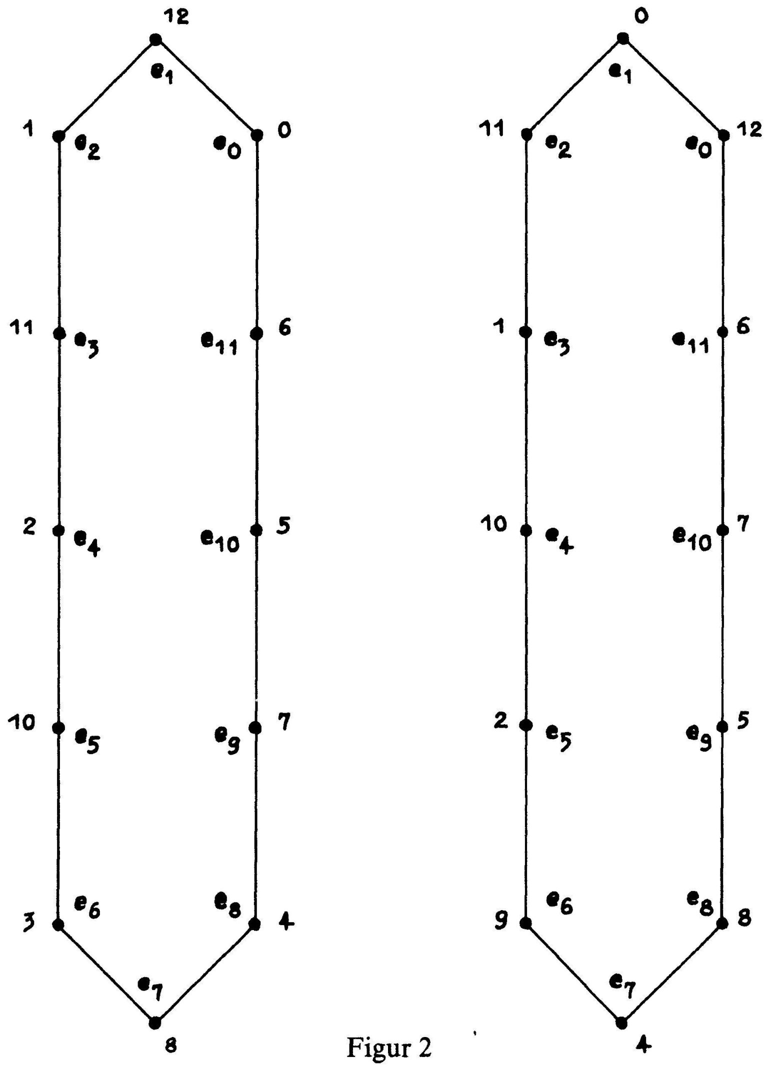
$$\text{(ii)}\ f'(e_\mu)=\begin{cases} k-\dfrac{\mu}{2}, \text{ falls } \mu \text{ gerade} \\ \dfrac{\mu-1}{2}+\left[\dfrac{2\mu}{k+2}\right], \text{ falls } \mu \text{ ungerade.} \end{cases}$$

In der Figur 2 sind die beiden durch f und f' hervorgerufenen graziösen Numerierungen von C_{12} dargestellt.

Zur Vereinfachung der folgenden Untersuchung sei noch darauf hingewiesen, dass mit jedem graziösen Graphen G auch jeder zu G isomorphe Graph $G'=\varphi(G)$ graziös ist. Man braucht nämlich nur die graziöse Numerierung von G in der Weise auf $G'=\varphi(G)$ zu übertragen, dass man für jede Ecke a von G die a zugeordnete Zahl auch dem Bild $\varphi(a)$ in G' zuordnet.

Nach diesen Vorbereitungen können die vier Teilklassen graziöser Graphen aus Γ ohne besondere Schwierigkeiten bestimmt werden. Es gilt zunächst der

Satz 1. *Es sei $C_k=(E,K)$ ein Kreis der Länge k mit $k\equiv 0\,(4)$. Dabei sei $E=\{e_0,e_1,\ldots, e_{k-1}\}$ und $K=\{\{e_i,e_{i+1}\}\mid i=0,1,\ldots,k-2\}\cup\{\{e_0,e_{k-1}\}\}$. Dann ist der durch Hinzufügen der Kante $\{e_1,e_{k-1}\}$ zu C_k gewonnene Graph $G_1=(E_1,K_1)$ mit $E_1=E$, $K_1=K\cup\{\{e_1,e_{k-1}\}\}$ graziös.*



Figur 2

Beweis. Zum Beweis dieser Behauptung gehen wir von der komplementären Numerierung mit der zugehörigen injektiven Abbildung f' von (ii) für C_k aus und definieren eine Abbildung f_1: $E_1 \to \{0, 1, \ldots, k+1\}$ folgendermassen:

$$f_1: \begin{cases} E_1 \to \{0, 1, \ldots, k+1\} \\ e_i \to f'(e_i) \text{ für } i = 0, 1, \ldots, k-2 \\ e_{k-1} \to k+1 \end{cases}$$

f_1 ist offenbar eine Injektion. Für die von f_1 induzierte Abbildung

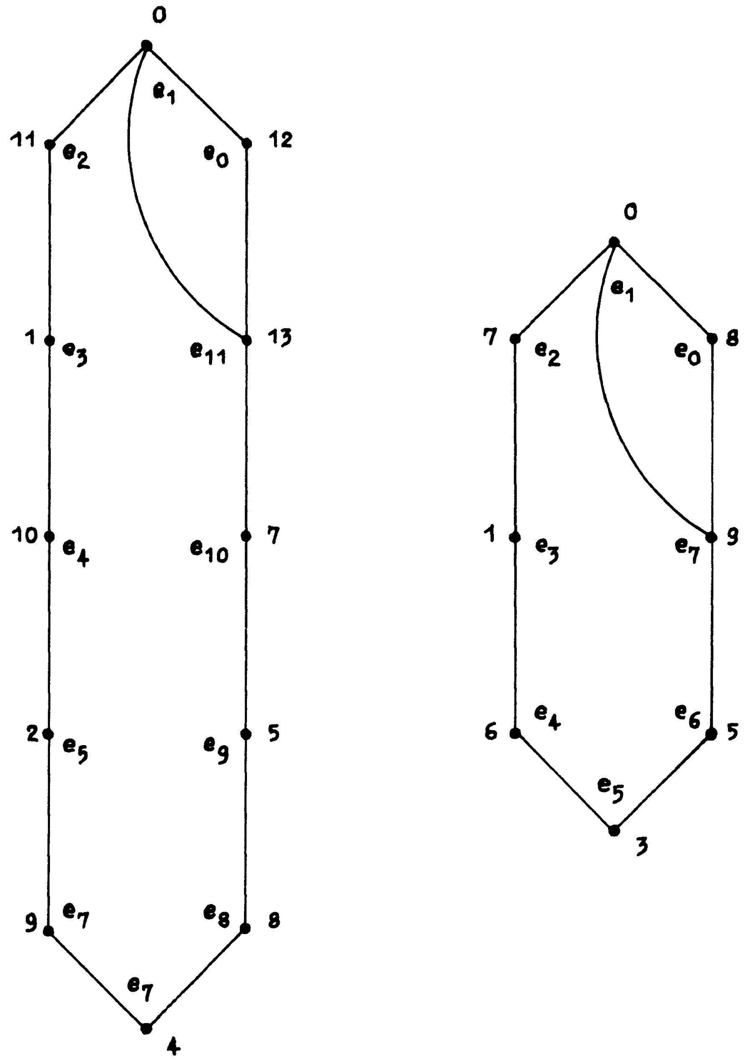
$$g_1: \begin{cases} K_1 \to \{1, 2, \ldots, k+1\} \\ \\ \{e_i, e_j\} \to |f_1(e_i) - f_1(e_j)| \text{ für alle } \{e_i, e_j\} \in K_1 \end{cases}$$

gilt: g_1 und g' stimmen auf der Menge $K_1 \setminus \{\{e_0, e_{k-1}\}, \{e_{k-2}, e_{k-1}\}, \{e_1, e_{k-1}\}\}$ überein. Mit Hilfe von (ii) hat man sofort

$$g_1(\{e_0, e_{k-1}\}) = 1 = g'(\{e_{k-2}, e_{k-1}\})$$

$$g_1(\{e_{k-2}, e_{k-1}\}) = \frac{k}{2} = g'(\{e_0, e_{k-1}\})$$

$$g_1(\{e_1, e_{k-1}\}) = k+1 .$$



Figur 3

Hieraus und aus der Surjektivität von g' folgt die Surjektivität von g_1. Da weiterhin Bild und Urbild von g_1 endlich sind, ist g_1 bijektiv. Also ist G_1 graziös.

In der Figur 3 sind zwei graziöse Graphen aus der durch Satz 1 bestimmten Teilklasse von Γ angegeben.

Bemerkung. Adjungiert man zu C_k statt der Kante $\{e_1, e_{k-1}\}$ eine Kante $\{e_i, e_j\}$ mit $i-j \equiv \pm 2\,(k)$, so ist der jeweils entstehende Graph zu G_1 isomorph und somit auf Grund der obigen Vorbemerkung ebenfalls graziös.

Eine ähnliche Klasse graziöser Graphen wird in Satz 2 bestimmt.

Satz 2. *Es sei $C_k = (E, K)$ ein Kreis der Länge k mit $k \equiv 0\,(4)$. Dabei sei $E = \{e_0, e_1, \ldots, e_{k-1}\}$ und $K = \{\{e_i, e_{i+1}\} \mid i = 0, 1, \ldots, k-2\} \cup \{\{e_0, e_{k-1}\}\}$. Dann ist der durch Adjunktion der Kante $\{e_0, e_3\}$ zu C_k gewonnene Graph $G_2 = (E_2, K_2)$ mit $E_2 = E$, $K_2 = K \cup \{\{e_0, e_3\}\}$ graziös.*

Beweis. Für $k=4$ gilt $G_2=C_k$. Für $k\geq 8$ gehen wir von der graziösen Numerierung mit der zugehörigen injektiven Abbildung f in (i) für C_k aus und definieren wegen $f(e_1)=k$ in naheliegender Weise

$$f_2: \begin{cases} E_2 \to \{0,1,\ldots,k+1\} \\ e_i \to f(e_i) \text{ für } i=0,2,3,\ldots,k-1 \\ e_1 \to k+1. \end{cases}$$

f_2 ist offenbar eine injektive Abbildung. Für die von f_2 induzierte Abbildung g_2 mit

$$g_2: \begin{cases} K_2 \to \{1,2,\ldots,k+1\} \\ \\ \{e_i,e_j\} \to |f_2(e_i)-f_2(e_j)| \text{ für jedes } \{e_i,e_j\}\in K_2 \end{cases}$$

gilt: g_2 stimmt auf der Menge $K_2\backslash\{\{e_0,e_1\},\ \{e_1,e_2\}\}$ mit g überein. Mit (i) hat man sofort

$$g_2(\{e_0,e_1\})=k+1$$
$$g_2(\{e_1,e_2\})=k=g(\{e_0,e_1\})$$
$$g_2(\{e_0,e_3\})=k-1=g(\{e_1,e_2\}).$$

Da g bijektiv ist, folgt damit auch, dass g_2 bijektiv ist. Also ist G_2 graziös.

In der Figur 4 sind zwei Vertreter aus der durch den Satz 2 bestimmten Klasse graziöser Graphen dargestellt.

Bemerkung. Adjungiert man zu C_k anstelle der Kante $\{e_0,e_3\}$ eine Kante $\{e_i,e_j\}$ mit $i-j\equiv\pm 3\,(k)$, so ist jeder der so gewonnenen Graphen zu G_2 isomorph und damit ebenfalls graziös.

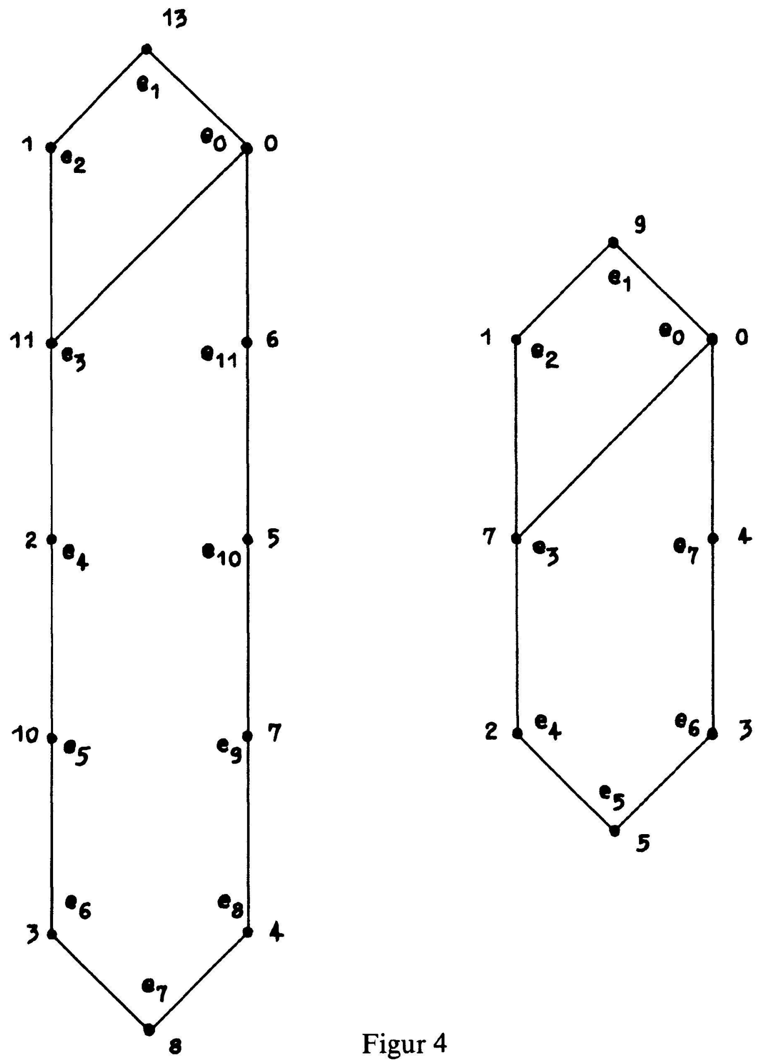
Betrachtet man die injektive Abbildung f in (i) genauer, so erkennt man direkt, dass für jeden Kreis C_k mit $k\equiv 0\,(4)$ stets $f(E)=\{0,1,\ \ldots,\ k\}\backslash\{(3k/4)\}$ gilt. Die $(3k/4)$ aufeinander folgenden nicht negativen ganzen Zahlen $0,1,\ \ldots,\ (3k/4)-1$ kommen also unter f als Bilder vor, und zwar in der folgenden Weise:

$$f(e_{2i})=i \text{ für } i=0,1,\ldots,\ \frac{k}{2}-1$$

$$f(e_{k-(2i+1)})=\frac{k}{2}+i \qquad \text{für } i=0,\ 1,\ldots,\ \frac{k}{4}-1$$

Unter Berücksichtigung dieser Tatsache ergibt sich dann der

Satz 3. *Es sei $C_k=(E,K)$ der in Satz 2 beschriebene Kreis. Ferner sei $a\notin E$ und $E'=E\cup\{a\}$. Bildet man dann sukzessive die $(3k/4)$ Graphen $G_0,G_1,\ \ldots,\ G_{(3k/4)-1}$ mittels der folgenden Vorschrift:*
$G_0=(E,K_0)$ mit $K_0=K\cup\{\{a,e_0\}\}$,
$G_i=(E',K_i)$ mit $K_i=K_{i-1}\cup\{\{a,e_{2i}\}\}$ für $i=1,2,\ldots,(k/2)-1$,
$G_{(k/2)+j}=(E',K_{(k/2)+j})$ mit $K_{(k/2)+j}=K_{(k/2)+j-1}\cup\{\{a,e_{k-(2j+1)}\}\}$
für $j=0,\ 1,\ldots,\ (k/4)-1$,
so ist G_i für $i=0,\ 1,\ldots,\ (3\,k/4)-1$ graziös.



Figur 4

Beweis. Sei $i \in \{0, 1, \ldots, (3k/4) - 1\}$ beliebig und G_i der oben definierte Graph mit $G_i = (E_i, K_i)$, $|E_i| = k+1$ und $|K_i| = k+i+1$. Die Abbildung

$$f_i: \begin{cases} E_i \to \{0, 1, \ldots, k+i+1\} \\ a \to k+i+1 \\ e_\mu \to f(e_\mu) \text{ für } e_\mu \in E \end{cases}$$

ist offenbar injektiv. Da f eine graziöse Numerierung des Graphen C_k liefert, folgt aus den Vorbetrachtungen zu diesem Satz sofort, dass für die von f_i induzierte Abbildung g_i: $K_i \to \{1, 2, \ldots, k+i+1\}$ gilt:

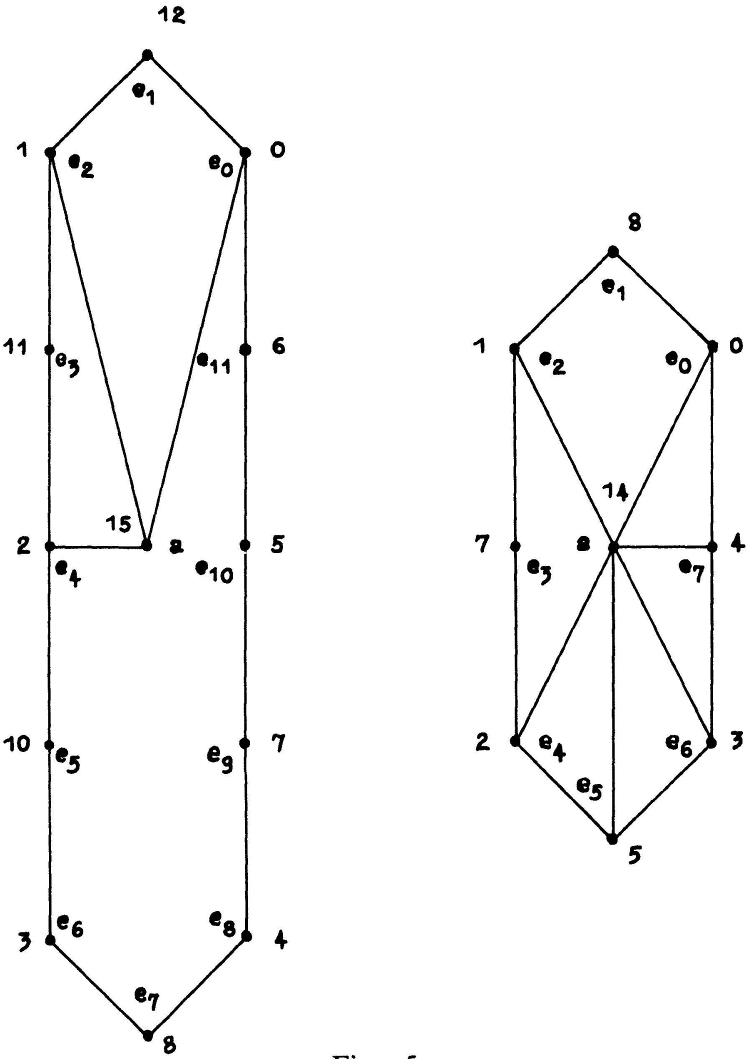
$$g_i(K) = \{1, 2, \ldots, k\}$$
$$g_i(K_i \backslash K) = \{k+1, k+2, \ldots, k+i+1\}.$$

Also ist g_i für $i = 0, 1, \ldots, (3k/4) - 1$ graziös.

Die Figur 5 zeigt zwei Graphen aus der durch Satz 3 bestimmten Klasse.

Es seien $C_k^b = (E^b, K^b)$ und $C_k^c = (E^c, K^c)$ zwei Kreise der Länge k mit $E^b = \{b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}\}$, $E^c = \{c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}\}$ und $K^b = \{\{b_i, b_{i+1}\} \mid i = 0, 1, \ldots, k-2\} \cup$

$\{\{b_0, b_{k-1}\}\}$, $K^c = \{\{c_i, c_{i+1}\} \mid i = 0, 1, \ldots, k-2\} \cup \{\{c_0, c_{k-1}\}\}$. Dabei sei $E^b \cap E^c = \emptyset$.



Figur 5

Die beiden Kreise sind trivialerweise isomorph. Ist $\varphi : E^b \to E^c$ ein solcher Isomorphismus, so nennen wir jeden Graphen $P_k = (E, K)$ mit $E = E^b \cup E^c$ und $K = K^b \cup K^c \cup \{\{b_i, \varphi(b_i)\} \mid i = 0, 1, \ldots, k-1\}$ ein Prisma mit $2k$ Ecken[3]). Da alle Prismen mit $2k$ Ecken offenbar isomorph sind, kann man sich etwa auf den Fall

$$(*)\; K = K^b \cup K^c \cup \{\{b_i, c_{i-1}\} \mid i = 1, 2, \ldots, k-1\} \cup \{\{b_0, c_{k-1}\}\}$$

beschränken. Im weiteren sei wieder $k \equiv 0\ (4)$. Dann gilt

Satz 4. *Es sei $k \in \mathbf{N}$ mit $k \equiv 0\ (4)$. Dann ist das Prisma P_k mit $2k$ Ecken graziös.*

[3]) Siehe Figur 6.

Beweis. Es sei $P_k = (E, K)$, wobei K die Darstellung (*) besitze. Setzt man

$$f^b(b_\mu) = f^c(c_\mu) = \begin{cases} \frac{\mu}{2}, \text{ falls } \mu \text{ gerade} \\ k - \frac{\mu - 1}{2} - \left[\frac{2\mu}{k+2}\right], \text{ falls } \mu \text{ ungerade,} \end{cases}$$

so definiert dies nach (i) zwei Abbildungen f^b: $E^b \to \{0, 1, \ldots, k\}, f^c$: $E^c \to \{0, 1, \ldots, k\}$, welche graziöse Numerierungen der zugehörigen Kreise C_k^b, C_k^c liefern. Wir definieren nun:

$$f: \begin{cases} E \to \{0, 1, \ldots, 3k\} \\ b_{2i+1} \to f^b(b_{2i+1}) + 2k \text{ für } i = 0, 1, \ldots, \frac{k}{2} - 1 \\ b_{2i} \to f^b(b_{2i}) \text{ für } i = 0, 1, \ldots, \frac{k}{2} - 1 \\ c_i \to f^c(c_i) + k \text{ für } i = 0, 1, \ldots, k-1. \end{cases}$$

f ist offensichtlich injektiv. Für die von f induzierte Abbildung

$$g: \begin{cases} K \to \{1, 2, \ldots, 3k\} \\ \{x, y\} \to |f(x) - f(y)| \text{ für alle } \{x, y\} \in K \end{cases}$$

gilt offenbar:

$$g(K^b) = \{1, 2, \ldots, k\} \tag{1}$$

$$g(K^c) = \{2k+1, 2k+2, \ldots, 3k\}. \tag{2}$$

Um noch zu zeigen, dass $g(K \setminus (K^b \cup K^c)) = \{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$, setzen wir

$$\delta(b_i) = \begin{cases} 0, \text{ falls } i \text{ gerade} \\ 1, \text{ falls } i \text{ ungerade} \end{cases}$$

und erhalten somit $f(b_i) = 2k \cdot \delta(b_i) + f^b(b_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Dann folgt

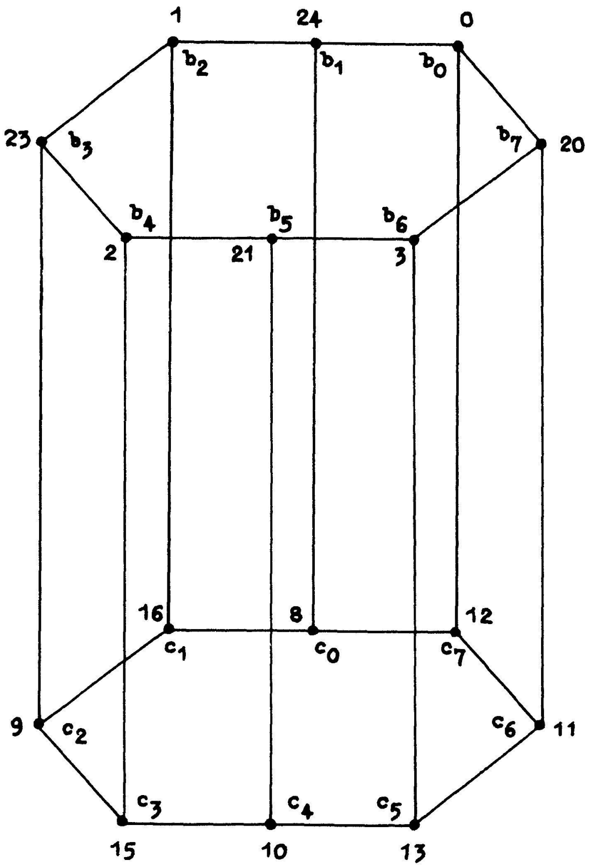
$$\begin{aligned} g(\{b_i, c_{i-1}\}) &= |f(b_i) - f(c_{i-1})| \\ &= |2k \cdot \delta(b_i) + f^b(b_i) - k - f^c(c_{i-1})| \\ &= k + |f^b(b_i) - f^b(b_{i-1})| \end{aligned}$$

für $i = 1, 2, \ldots, k-1$ und

$$\begin{aligned} g(\{b_0, c_{k-1}\}) &= |f(b_0) - f(c_{k-1})| \\ &= |f^b(b_0) - k - f^b(b_{k-1})| \\ &= k + |f^b(b_0) - f^b(b_{k-1})|. \end{aligned}$$

Da f^b eine graziöse Numerierung von C_k^b liefert, hat man damit $g(K\backslash(K^b \cup K^c)) = \{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$. Hieraus und aus (1) und (2) ergibt sich die Surjektivität von g. Also ist g bijektiv und P_k daher graziös.

Die Figur 6 zeigt das P_8.



Figur 6

Abschliessend sei noch kurz darauf hingewiesen, dass die in Satz 1 und Satz 2 bestimmten Teilklassen zu einer umfassenderen Klasse graziöser Graphen gehören. Es gilt nämlich allgemein, dass jeder beliebige Kreis $C_k = (E, K)$ der Länge $k \in \mathbb{N} \backslash \{1, 2\}$ mit $E = \{e_0, e_1, \ldots, e_{k-1}\}$ und $K = \{\{e_i, e_{i+1}\} \mid i = 0, 1, \ldots, k-2\} \cup \{e_0, e_{k-1}\}$, zu dem man eine beliebige Kante $\{e_\nu, e_\mu\}$ mit $e_\nu, e_\mu \in E$ adjungiert, zu einem graziösen Graphen wird. Der Beweis dieser Aussage würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

H. Bodendiek, H. Schumacher und H. Wegner, Duisburg

LITERATURVERZEICHNIS

1 R. Bodendiek, H. Schumacher, H. Wegner, *Über graziöse Graphen.* Math. Phys. Semesterberichte 1977, Heft 1, pp. 103-126.

2 S.W. Golomb, *How to Number a Graph, in Graph Theory and Computing* (R.C. Read, ed.), pp. 23-37 (Academic Press, New York and London 1972).

3 F. Harary, *Graph Theory,* Addison-Wesley, Reading (Mass.) 1969.

4 J. Sedláček, *Einführung in die Graphentheorie,* Harri Deutsch, Frankfurt (Main) und Zürich 1968.

5 K. Wagner, *Graphentheorie,* Bibliographisches Institut (Mannheim 1970).