Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **31 (1976)**

Heft 6

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Dann folgt für alle $n \in \mathbf{N}$, dass

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{y}{n}\right)^n$$

ist, also

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n$$

und damit, dass

$$e^x < e^y$$

ist.

Dieter Rüthing, Paderborn (BRD)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] C. Blatter, *Analysis I.* Springer-Verlag, Berlin 1974.

[2] K. Prachar, *Über einige einfache Folgen und Reihen im Schulunterricht.* El. Math. *30*, 36–39 (1975).

Aufgaben

Aufgabe 753. M sei eine Menge, und $E(M)$ sei die Menge aller endlichen Teilmengen von M. Ferner sei K ein Körper, und R sei die Menge aller Abbildungen von $E(M)$ in K. Definiert man für $f, g \in R$ die Summe $f+g$ durch $(f+g)(X) = f(X)+g(X)$ für alle $X \in E(M)$ und das Produkt fg durch $(fg)(X) = \sum_{Y \subset X} f(Y)\, g(X \setminus Y)$ für alle $X \in E(M)$, so ist $R(+, \cdot)$ ein Ring mit 1. Dabei ist die Eins die durch $e(\phi)=1$ und $e(X)=0$ für $X \neq \phi$ definierte Abbildung e. Man rechnet leicht nach, dass die Menge I aller $f \in R$, für die $f(\phi)=0$ ist, ein Ideal von R ist. Zeige: Ist $I = Rf_1 + \cdots + Rf_n$ mit $f_i \in I$, so ist M endlich, und es gilt $|M| \leq n$. Insbesondere folgt also, dass I nicht endlich erzeugt ist, wenn M unendlich ist.

H. Lüneburg, Kaiserslautern, Bundesrepublik Deutschland

Lösung des Aufgabenstellers. Es sei $f \in I$. Es gibt dann $r_1, \ldots, r_n \in R$ mit $f = \sum_{i=1}^{n} r_i f_i$. Daher ist

$$f(\{a\}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{Y \subset \{a\}} r_i(Y) f_i(\{a\} \setminus Y) = \sum_{i=1}^{n} r_i(\emptyset) f_i(\{a\}).$$

Bezeichnet man mit f^* die Einschränkung von $f \in I$ auf $\{\{a\} \mid a \in M\}$, so ist also $f^* \in K f_1^* + \cdots + K f_n^*$, so dass der Vektorraum $\{f^* \mid f \in I\}$ endlich erzeugt ist. Definiert man für $a \in M$ die Abbildung f_a durch $f_a(\{a\}) = 1$ und $f_a(X) = 0$ für $X \neq \{a\}$, so folgt einmal $f_a \in I$ und zum andern, dass die Menge der f_a^* linear unabhängig ist. Also ist

$$|M| \leq \dim\{f^* \mid f \in I\} = \dim(Kf_1^* + \cdots + Kf_n^*) \leq n.$$

Weitere Lösungen sandten O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande) und Chr. A. Meyer (Bern).

Aufgabe 754. Es seien K_1, K_2, K_3 drei Kegelschnitte einer Ebene mit insgesamt 12 verschiedenen Schnittpunkten S. Ein beliebiger, auf keiner dieser Kurven liegender Punkt X der Ebene bestimmt mit den vier nicht auf K_i liegenden Punkten S je einen Kegelschnitt $\bar{K}_i$. Man zeige: Die drei Kurven $\bar{K}_i$ haben ausser X noch drei weitere gemeinsame Punkte.

C. Bindschedler, Küsnacht ZH

Lösung. Es sei $K_i(x,y,z)=0$ die Gleichung von K_i und $\bar{K}_i(x,y,z)=0$ die von $\bar{K}_i$, $i=1,2,3$. Es sei $X=X(\xi,\eta,\zeta)$. Man hat dann

$$\begin{aligned}
\bar{K}_1(x,y,z) &\equiv K_2(\xi,\eta,\zeta)\,K_3(x,y,z) - K_3(\xi,\eta,\zeta)\,K_2(x,y,z) = 0\\
\bar{K}_2(x,y,z) &\equiv K_3(\xi,\eta,\zeta)\,K_1(x,y,z) - K_1(\xi,\eta,\zeta)\,K_3(x,y,z) = 0\\
\bar{K}_3(x,y,z) &\equiv K_1(\xi,\eta,\zeta)\,K_2(x,y,z) - K_2(\xi,\eta,\zeta)\,K_1(x,y,z) = 0
\end{aligned}$$

Wir finden also ein homogenes Gleichungssystem in $K_1(x,y,z)$, $K_2(x,y,z)$ und $K_3(x,y,z)$. Da die Determinante

$$\begin{vmatrix}
0 & -K_3(\xi,\eta,\zeta) & K_2(\xi,\eta,\zeta)\\
K_3(\xi,\eta,\zeta) & 0 & -K_1(\xi,\eta,\zeta)\\
-K_2(\xi,\eta,\zeta) & K_1(\xi,\eta,\zeta) & 0
\end{vmatrix}$$

gleich Null ist, sind $\bar{K}_1(x,y,z)$, $\bar{K}_2(x,y,z)$ und $\bar{K}_3(x,y,z)$ linear abhängig, also bestimmen $\bar{K}_1, \bar{K}_2$ und $\bar{K}_3$ ein Büschel, und das beantwortet die Frage.

L. Kuipers, Mollens VS

Weitere Lösungen sandten J. T. Groenman (Groningen, Niederlande), K. Grün (Linz, Österreich) und O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande).

Aufgabe 755. Für ganzzahlige Indizes n, k mit $n \geq 0$ seien die Zahlen $T(n,k)$ definiert durch

$$\begin{aligned}
&T(0,k)=0 \quad (k\neq 0), \quad T(0,0)=1,\\
&T(n,k)=T(n-1,k-1)+(k+1)\,T(n-1,k) \quad (n\geq 1).
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1\\
\multicolumn{9}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}$$

($S(n,k)=T(n-1,k-1)$ heisst die zu n und k gehörige Stirlingsche Zahl zweiter Art.) Die von 0 verschiedenen $T(n,k)$ lassen sich dann entsprechend einem Pascalschen Dreieck anordnen. Notiert man in diesem Zahlendreieck nur die Reste der $T(n,k)$ modulo 2, so können Blöcke von aufeinanderfolgenden Ziffern 0 und 1 innerhalb der Zeilen als Dualdarstellungen nichtnegativer ganzer Zahlen aufgefasst werden.

Kann eine kleinste natürliche Zahl angegeben werden, deren Dualdarstellung nicht als Teilblock irgendeiner Zeile vorkommt?

H. Harborth, Braunschweig, BRD

Lösung. Diagonale Streifen der Breite 2 unterteilen das mod 2 reduzierte Zahlenschema in rhombische Felder der Form

$$A(m,k) := \left\langle \begin{array}{ccc} & T(2m,2k) & \\ T(2m+1,2k) & & T(2m+1,2k+1) \\ & T(2m+2,2k+1) & \end{array} \right\rangle.$$

Dabei treten zu Beginn nur die Felder

$$\mathbf{1} := \left\langle \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \end{array} \right\rangle, \mathbf{0} := \left\langle \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{array} \right\rangle \text{ und } \mathbf{A} := \left\langle \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 0 & & 1 \\ & 0 & \end{array} \right\rangle$$

auf. Die Rekursionsformel für $T(\cdot,\cdot)$ zeigt, dass $A(m+1,k+1)$ durch $A(m,k)$ und $A(m,k+1)$ eindeutig bestimmt ist; wir schreiben dafür $A(m+1,k+1)= A(m,k) * A(m,k+1)$. Es gelten dann die Beziehungen

$$(*)\ \mathbf{0}=\mathbf{0}*\mathbf{0}=\mathbf{0}*\mathbf{A}=\mathbf{A}*\mathbf{1},\quad \mathbf{1}=\mathbf{0}*\mathbf{1}=\mathbf{A}*\mathbf{0}=\mathbf{A}*\mathbf{A},\quad \mathbf{A}=\mathbf{1}*\mathbf{0}=\mathbf{1}*\mathbf{A},$$

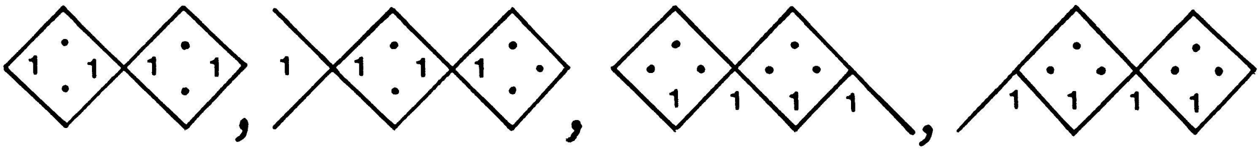
$$\mathbf{1}*\mathbf{1}= \left\langle \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ & 1 & \end{array} \right\rangle =: \mathbf{B}.$$

Wir behaupten nun, dass

(1) $A(m,k)\neq \mathbf{A}$ für alle geraden k,
(2) $A(m,k)\neq \mathbf{1}$ für alle ungeraden k.

Andernfalls gäbe es nämlich eine Zeile kleinster Nummer des Rhombenschemas, bei welcher eine der Bedingungen (1), (2) verletzt wäre. Durch eine Musterung aller in (*) angegebenen Möglichkeiten der Gewinnung von **A** und **1** zeigt sich, dass dann bereits in der vorangehenden Zeile **A** oder **1** an einem verbotenen Platz stehen müsste, dass also dort schon (1) oder (2) verletzt wäre, im Widerspruch zur Minimalität der Zeilennummer. Damit ist bewiesen, dass die Konstellationen **A** – **A** und **1** – **1** nicht vorkommen können. Daraus folgt unmittelbar, dass **B** nie auftreten kann.

Im ursprünglichen mod 2 reduzierten Schema findet man duale Zifferndarstellungen der Zahlen 1 bis und mit 14. Die Ziffernfolge 1111 könnte nur in den folgenden vier Stellungen im Rhombenschema vorkommen:



Da **B** nicht auftritt, müssen alle punktierten Rhombenfelder **1** sein, was in jedem Fall die verbotene Konstellation **1** – **1** erzeugt. Also ist 15 die gesuchte Zahl.

Problemgruppe Bern

Weitere Lösungen sandten O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), I. Paasche (München, BRD), M. Vowe (Therwil BL) und H. Warncke (Porto Alegre, Brasilien).

Aufgabe 756. Eine Transversale t von der Ecke A aus teile das ebene Dreieck ABC in zwei Teildreiecke mit gleichem Inkreisradius ρ. Man beweise $1 = 2\rho/h_a + \sqrt{r/r_a}$, worin h_a Höhe, r Inkreisradius und r_a Ankreisradius von ABC bezeichnen. Ferner zeige man, dass $w_a \leq t \leq m_a$ mit Gleichheit genau für $b = c$. Dabei ist w_a die Winkelhalbierende des Dreieckswinkels bei A und m_a die von A ausgehende Schwerlinie.

I. Paasche, München, BRD

Lösung. Sei T der Fusspunkt der Transversalen t und indizieren wir mit 1 das Teildreieck (ABT), mit 2 (ATC), so gilt

$$F = F_1 + F_2 \text{ oder } rs = \rho(s+t). \tag{1}$$

Die Berührungsverhältnisse der Seiten c und a, resp. b und a durch die drei Inkreise führen auf

$$\begin{aligned} r/(s-b) = \rho/(s_1 - t) \text{ und } r/(s-c) &= \rho/(s_2 - t) \\ \text{oder } r(s_1 - t) &= \rho(s-b) \\ r(s_2 - t) &= \rho(s-c). \end{aligned}$$

Die Summe der beiden Gleichungen gibt

$$r(s-t) = \rho a. \tag{2}$$

Die Division von (1) und (2) führt auf

$$t = \sqrt{s(s-a)}. \tag{3}$$

Aus $F = rs = r_a(s-a) = a \cdot h_a/2$, (1) und (3) ergibt sich

$$\frac{2\rho}{h_a} + \sqrt{\frac{r}{r_a}} = \frac{a}{s+t} + \sqrt{\frac{s-a}{s}} = \frac{s-t}{s} + \frac{t}{s} = 1.$$

Schliesslich ist die Ungleichung

$$(b+c)^2 \leq a^2 + 4m_a^2$$

(z. B. Bottema et al., Geometric Inequalities, p. 121, 5°) gleichwertig

$$\sqrt{s(s-a)} \leq m_a.$$

Wegen

$$\sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2} \text{ gilt } w_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)} \leq \sqrt{s(s-a)}$$

In beiden Fällen gilt das Gleichheitszeichen genau für $b=c$.

P. Nüesch, Lausanne

Weitere Lösungen sandten P. Addor (Bern), G. Bercea (München, BRD), C. Bindschedler (Küsnacht ZH), P. Bundschuh (Köln, BRD), J.T. Groenman (Groningen, Niederlande), K. Grün (Linz, Österreich), H. Knoll (Disentis GR), L. Kuipers (Mollens VS), O.P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), J. Quoniam (St-Etienne, Frankreich), W.A. van der Spek (Mantgum, Niederlande) und M. Vowe (Therwil BL).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis **10. Juni 1977** an **Dr. H. Kappus**. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, p. 67), Problem 625 B (Band 25, p. 68), Problem 645 A (Band 26, p. 46), Problem 672 A (Band 27, p. 68), Aufgabe 680 Band 27, p. 116), Problem 724 A (Band 30, p. 91), Problem 764 A (Band 31, p. 44).

Aufgabe 777. Der Punkt P liege in der Ebene eines Sehnenvierecks, dessen Ecken in zyklischer Anordnung mit A, B, C, D bezeichnet seien. Man zeige, dass dann stets

$$\frac{\overline{PA}^2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CD} + \overline{PC}^2 \cdot \overline{DA} \cdot \overline{AD}}{\overline{PD}^2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{PB}^2 \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DA}} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{CD} + \overline{DA} \cdot \overline{AB}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{CD} \cdot \overline{DA}}$$

G. Bercea, München, BRD

Aufgabe 778. Für ein beliebiges ebenes Dreieck $A_1A_2A_3$ bestimme man einen Punkt P in seinem Inneren mit folgender Eigenschaft: Sind Q_1, Q_2, Q_3 die von P

verschiedenen Schnittpunkte je zweier der drei durch P verlaufenden Kreise um A_1, A_2, A_3, so ist das Dreieck $Q_1 Q_2 Q_3$ zum gegebenen Dreieck ähnlich. Wann sind diese Dreiecke sogar kongruent?

J. Brejcha, Brno, ČSSR

Aufgabe 779. A sei der Ring aller ganzen algebraischen Zahlen. Ferner sei p eine Primzahl. Dann gilt:

a) Es gibt ein maximales Ideal P von A mit $p \in P$.

b) Ist P ein maximales Ideal von A mit $p \in P$, so ist A/P der algebraische Abschluss von $GF(p)$.

Dies ist zu beweisen.

H. Lüneburg, Kaiserslautern, BRD

Aufgabe 780. Man beweise: Für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[(k-1)/n]}}{2k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} (\pi - w_{nk}) \operatorname{cosec} w_{nk}.$$

Dabei ist $[x]$ = grösste ganze Zahl $\leq x$ und $w_{nk} = \dfrac{2k-1}{2n}\pi$.

I. Paasche, München, BRD

Literaturüberschau

Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Masstheorie. Von Heinz Bauer. 2. Auflage. 407 Seiten. DM 48,-. Walter de Gruyter, Berlin 1974.

Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist seit ihrer axiomatischen Grundlegung durch A. N. Kolmogoroff im Jahre 1933 unlösbar mit der Mass- und Integrationstheorie verbunden.

Es ist deshalb begrüssenswert, dass nun die 2. Auflage eines Werkes in deutscher Sprache erschienen ist, das auf hohem Niveau in die genannten Disziplinen einführt.

Im 1. und 3. Teil wird unabhängig von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen die Mass- und Integrationstheorie entwickelt, wobei auch Masse auf topologischen Räumen berücksichtigt sind. Der Rest des Buches ist der Wahrscheinlichkeitstheorie gewidmet: Gesetz der grossen Zahlen, Grenzwertsätze, stochastische Prozesse, vor allem Markovprozesse. Neu sind die über 200 Aufgaben, die dem Leser ein aktives Mitarbeiten erlauben.

Heinz Bauer vermittelt eine klare, streckenweise anspruchsvolle Einführung in eine moderne mathematische Disziplin, die so zahlreiche Anwendungen in vielen Wissenschaftsbereichen gefunden hat.

H. Loeffel

Subjektive Wahrscheinlichkeiten. Von H. W. Gottinger. 101 Seiten. DM 28,-. Verlag Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1974.

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff erscheint im wesentlichen unter zwei Aspekten. Für die Mehrheit der anglo-amerikanischen Schule steht die *häufigkeitsinterpretierte* Wahrscheinlichkeit im Vordergrund. Im Rahmen der Entscheidungstheorie bei Unsicherheit (inkl. statistischer Entscheidungstheorie) wird die