Bemerkungen zur Exponentialfunktion mit rationalem Definitionsbereich

Autor(en): **Rüthing, Dieter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **31 (1976)**

Heft 6

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-31406

Bemerkungen zur Exponentialfunktion mit rationalem Definitionsbereich

In [2] wurde für den schönen Nachweis der steigenden Monotonie und der Beschränktheit, also der Konvergenz, der Folge $((1+1/n)^n)$ jeweils an entscheidender Stelle die für alle $a, b \in \mathbf{R}$ und für alle $n \in \mathbf{N}$ gültige Gleichung

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1} \tag{1}$$

benutzt. Mit ihr ist ebenfalls im wesentlichen beweisbar der

Satz. *Für jede Folge nichtnegativer reeller Zahlen $(a_1, a_2, \ldots)$ gilt: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ ist, dann ist für alle $k \in \mathbf{N}$*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{g}\,.$$

Beweis. Sei $(a_1, a_2, \ldots)$ eine beliebige gegen g konvergierende Folge nichtnegativer reeller Zahlen und sei $k \in \mathbf{N}$ beliebig gewählt.

Für den Beweis ist es günstig, eine Fallunterscheidung zu machen.

1. Fall: $g = 0$.
Die Voraussetzung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ impliziert: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ existiert ein $n(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen $n > n(\varepsilon)$ folgt, dass $|a_n - 0| < \varepsilon^k$ ist. Aus der Nichtnegativität der reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ und der Monotonie der $\sqrt[k]{}$-Funktion ergibt sich ebenfalls für alle natürlichen Zahlen $n > n(\varepsilon)$, dass $\sqrt[k]{a_n} < \varepsilon$ ist, also auch $|\sqrt[k]{a_n} - 0| < \varepsilon$ gilt. Damit ist der 1. Fall bewiesen.

2. Fall: $g \in \mathbf{R}^+$.
Die Voraussetzung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ impliziert: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ existiert ein $n(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen $n > n(\varepsilon)$ folgt, dass $|a_n - g| < \varepsilon \cdot (\sqrt[k]{g})^{k-1}$ ist. Da nach (1)

$$a_n - g = (\sqrt[k]{a_n})^k - (\sqrt[k]{g})^k = (\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{g})\sum_{i=1}^{k}(\sqrt[k]{a_n})^{k-i}(\sqrt[k]{g})^{i-1}$$

ist, folgt für alle natürlichen Zahlen $n > n(\varepsilon)$ die Abschätzung

$$|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{g}| = \left| \frac{a_n - g}{\sum\limits_{i-1}^{k}(\sqrt[k]{a_n})^{k-i}(\sqrt[k]{g})^{i-1}} \right| < \frac{|a_n - g|}{(\sqrt[k]{g})^{k-1}} < \varepsilon\,.$$

Damit ist der 2. Fall bewiesen. Beide Fälle zusammen beweisen den Satz.

Dieser Satz versetzt uns in Verbindung mit den Grenzwertsätzen für Folgen – sie gehören zum Standardstoff zumindest eines Analysisleistungskurses im Gymnasium – und der für alle $n, x \in \mathbf{N}$ gültigen Gleichung

$$1+\frac{x}{n}=\prod_{i=0}^{x-1}\left(1+\frac{1}{n+i}\right) \tag{2}$$

in die Lage, die Exponentialfunktion für den Definitionsbereich **Q** sukzessive zu erklären. Vorab beweisen wir jedoch (2) durch vollständige Induktion über x. Dazu sei $n\in\mathbf{N}$ beliebig gewählt.

$$x=1:\ 1+\frac{1}{n}=1+\frac{1}{n+0}=\prod_{i=0}^{0}\left(1+\frac{1}{n+i}\right)$$

$$x\to x+1:\ 1+\frac{x+1}{n}=1+\frac{x}{n}+\frac{1}{n}=1+\frac{x}{n}+\frac{n+x}{n(n+x)}=1+\frac{x}{n}+\frac{1}{n+x}+\frac{x}{n(n+x)}$$

$$=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+x}\right)=\left[\prod_{i=0}^{x-1}\left(1+\frac{1}{n+i}\right)\right]\left(1+\frac{1}{n+x}\right)$$

$$=\prod_{i=0}^{x}\left(1+\frac{1}{n+i}\right)$$

Damit sind die Vorbereitungen abgeschlossen. Sie erlauben eine schrittweise und konstruktive Definition der Exponentialfunktion, die zuerst für **N** erklärt wird und dann über **Z** auf **Q** erweitert wird. Wir sind der Meinung, dass dieses konstruktive Vorgehen für den Schüler kanonischer ist als das reihenmässige Vorgehen, da es dem gewohnten Prinzip der Erweiterung entspricht und zudem nur Kenntnisse über Folgen benutzt.

1. Schritt: $x\in\mathbf{N}$.

$$e^x=\prod_{i=0}^{x-1}\frac{e}{1}=\prod_{i=0}^{x-1}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+i}\right)^{n+i}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+i}\right)^{i}}=\prod_{i=0}^{x-1}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+i}\right)^{n+i}}{\left(1+\frac{1}{n+i}\right)^{i}}$$

$$=\prod_{i=0}^{x-1}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+i}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{x-1}\left(1+\frac{1}{n+i}\right)^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\prod_{i=0}^{x-1}\left(1+\frac{1}{n+i}\right)\right]^{n}\underset{(2)}{=}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$$

2. Schritt: $x=0$

$$e^0=1=\lim_{n\to\infty}1^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0}{n}\right)^n$$

3. Schritt: $x\in\mathbf{Z}^-$

Für jedes $x\in\mathbf{Z}^-$ gilt die Gleichung $x=-|x|$, wobei $|x|\in\mathbf{N}$ ist.

$$e^x = e^{-|x|} = \frac{1}{e^{|x|} \cdot 1^{|x|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{|x|}{n-|x|}\right)^{n-|x|} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{|x|}{n-|x|}\right)^{|x|}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{|x|}{n-|x|}\right)^{n-|x|} \cdot \left(1+\frac{|x|}{n-|x|}\right)^{|x|}\right]} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{|x|}{n-|x|}\right)^{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{|x|}{n-|x|}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-|x|}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{|x|}{n}\right)^{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$$

4. Schritt: $x \in \mathbf{N}^{-1}: = \{n^{-1} \mid n \in \mathbf{N}\}$.
Zu jedem $x \in \mathbf{N}^{-1}$ existiert ein $q \in \mathbf{N}$ derart, dass die Gleichung $x = q^{-1}$ gilt.

$$e^x = e^{q^{-1}} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{qn}\right)^{qn}\right]^{q^{-1}} \underset{\text{Satz}}{=} \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{qn}\right)^{qn}\right]^{q^{-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{qn}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$$

5. Schritt: $x \in \mathbf{Q}$
Zu jedem $x \in \mathbf{Q}$ existieren $p \in \mathbf{Z}$ und $q \in \mathbf{N}$ derart, dass die Gleichung $x = \frac{p}{q}$ gilt.

$$e^x = e^{p/q} = [e^p]^{1/q} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{qn}\right)^{qn}\right]^{1/q} \underset{\text{Satz}}{=} \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{qn}\right)^{qn}\right]^{1/q}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{qn}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$$

Durch die Zusammenfassung der Schritte 1. bis 5. ist damit die Exponentialfunktion

$$e\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto e^x := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$$

folgenmässig erklärt.

Die steigende Monotonie der Exponentialfunktion in $\mathbf{Q}$ ist über diese Definition aufgrund der Verträglichkeit der $\lim\limits_{n\to\infty}$-bildung bei Folgen mit der Ordnungsstruktur auf $\mathbf{R}$ – d.h. wenn für zwei konvergente Folgen $(a_1, a_2, \ldots)$ und $(b_1, b_2, \ldots)$ reeller Zahlen für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt, dass $a_n \leq b_n$ ist, dann ist folglich $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ – leicht zu zeigen. Seien dazu $x, y \in \mathbf{Q}$ beliebig gewählt mit $x < y$.

Dann folgt für alle $n \in \mathbf{N}$, dass

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{y}{n}\right)^n$$

ist, also

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n$$

und damit, dass

$$e^x < e^y$$

ist.

Dieter Rüthing, Paderborn (BRD)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] C. BLATTER, *Analysis I.* Springer-Verlag, Berlin 1974.

[2] K. PRACHAR, *Über einige einfache Folgen und Reihen im Schulunterricht.* El. Math. *30*, 36–39 (1975).

Aufgaben

Aufgabe 753. M sei eine Menge, und $E(M)$ sei die Menge aller endlichen Teilmengen von M. Ferner sei K ein Körper, und R sei die Menge aller Abbildungen von $E(M)$ in K. Definiert man für $f, g \in R$ die Summe $f+g$ durch $(f+g)(X) = f(X)+g(X)$ für alle $X \in E(M)$ und das Produkt fg durch $(fg)(X) = \sum_{Y\subset X} f(Y)\, g(X\setminus Y)$ für alle $X \in E(M)$, so ist $R(+,\cdot)$ ein Ring mit 1. Dabei ist die Eins die durch $e(\phi)=1$ und $e(X)=0$ für $X \neq \phi$ definierte Abbildung e. Man rechnet leicht nach, dass die Menge I aller $f \in R$, für die $f(\phi)=0$ ist, ein Ideal von R ist. Zeige: Ist $I = Rf_1 + \cdots + Rf_n$ mit $f_i \in I$, so ist M endlich, und es gilt $|M| \leq n$. Insbesondere folgt also, dass I nicht endlich erzeugt ist, wenn M unendlich ist.

H. Lüneburg, Kaiserslautern, Bundesrepublik Deutschland

Lösung des Aufgabenstellers. Es sei $f \in I$. Es gibt dann $r_1, \ldots, r_n \in R$ mit $f = \sum_{i=1}^{n} r_i f_i$. Daher ist

$$f(\{a\}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{Y\subset\{a\}} r_i(Y) f_i(\{a\}\setminus Y) = \sum_{i=1}^{n} r_i(\emptyset) f_i(\{a\}).$$

Bezeichnet man mit f^* die Einschränkung von $f \in I$ auf $\{\{a\} \mid a \in M\}$, so ist also $f^* \in Kf_1^* + \cdots + Kf_n^*$, so dass der Vektorraum $\{f^* \mid f \in I\}$ endlich erzeugt ist. Definiert man für $a \in M$ die Abbildung f_a durch $f_a(\{a\}) = 1$ und $f_a(X) = 0$ für $X \neq \{a\}$, so folgt einmal $f_a \in I$ und zum andern, dass die Menge der f_a^* linear unabhängig ist. Also ist