

Zerlegung eines konvexen Polygons in konvexe Polygone

Autor(en): **Blind, Gerd**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **31 (1976)**

Heft 6

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-31403>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 31

Heft 6

Seiten 129–160

10. November 1976

Zerlegung eines konvexen Polygons in konvexe Polygone

Wir wollen folgende Fragestellung untersuchen: Gegeben ist ein ebenes konvexes Polygon P , auf dessen Rand p Eckpunkte liegen. Dieses Polygon P soll in f konvexe Polygone P_j zerlegt werden. Wir setzen voraus, dass keine Ecke eines Polygons P oder P_j innerer Punkt einer Kante eines anderen Polygons ist. Wir betrachten das zerlegte Polygon P und bezeichnen die Gesamtzahl der (äusseren und inneren) Eckpunkte mit e , die Gesamtzahl der Kanten mit k .

Der Eulersche Polyedersatz besagt

$$e + f = k + 1. \quad (1)$$

Mit f_i bezeichnen wir die Anzahl der i -Ecke ($i \geq 3$) unter den Polygonen P_j . Dann gilt

$$f = f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + \cdots, \quad (2)$$

$$k = \frac{1}{2}(3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \cdots + p). \quad (3)$$

Setzt man (2) und (3) in (1) ein, so erhält man

$$f_3 + 2f_4 + 3f_5 + 4f_6 + \cdots = 2e - p - 2. \quad (4)$$

Für die folgenden Untersuchungen unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem ob durch die Zerlegung in P innere Eckpunkte gegeben sind oder nicht.

Fall A. In P liegen keine inneren Eckpunkte, d. h.

$$e = p. \quad (5)$$

Damit lautet die Gleichung (4)

$$f_3 + 2f_4 + 3f_5 + 4f_6 + 5f_7 + \cdots = p - 2. \quad (4A)$$

Dies stellt eine notwendige Bedingung dar für die Anzahlen f_i der konvexen i -Ecke, aus denen das konvexe p -Eck P ohne innere Eckpunkte kombiniert werden kann. Weil wir auch die Umkehrung zeigen können, gilt

Satz 1. *Ein konvexes p -Eck kann genau dann ohne innere Eckpunkte in konvexe i -Ecke ($i \geq 3$) so zerlegt werden, dass für jedes i genau f_i i -Ecke auftreten, wenn (4A) gilt.*

Beweis: Wir haben nur noch zu zeigen, dass sich zu allen nicht-negativen ganzzahligen Werten f_i , welche die Gleichung (4A) erfüllen, eine Zerlegung eines konvexen p -Ecks P in konvexe i -Ecke ($i \geq 3$) so finden lässt, dass für jedes i genau f_i i -Ecke auftreten. Sei also P ein beliebiges konvexes p -Eck. Zeichnet man alle von einem beliebigen Eckpunkt von P ausstrahlenden Diagonalen, so wird P in $p-2$ Dreiecke zerlegt. Zwei benachbarte dieser Dreiecke kann man zu einem Viereck zusammenfassen, drei zu einem Fünfeck usw. Also kann man durch Weglassen einzelner Diagonalen alle Lösungen von (4A) realisieren. Die entstandenen Polygone P_j sind als Durchschnitte eines konvexen Polygons P mit Halbebenen auch konvex.

Fall B. Innere Eckpunkte sind vorhanden, d. h.

$$e > p. \quad (6)$$

Unter den p Randecken von P seien $\bar{p}$ 2wertige (d. h. mit genau 2 ausstrahlenden Kanten). Weil alle Polygone P_j ($j = 1, \dots, f$) konvex sind, liegen im Inneren von P keine 2wertigen Ecken. Ausser von den genannten $\bar{p}$ Ecken strahlen von jedem Eckpunkt mindestens 3 Kanten aus. Jede Kante wird von 2 Eckpunkten begrenzt. Also gilt

$$3e \leq 2k + \bar{p}. \quad (7)$$

Kombiniert mit (1) heisst das

$$k \leq 3f + \bar{p} - 3. \quad (8)$$

Weil alle Polygone P_j ($j = 1, \dots, f$) konvex sein sollen, müssen mindestens 3 Eckpunkte von P eine Wertigkeit ≥ 3 haben; d. h.

$$p \geq 3 + \bar{p}. \quad (9)$$

Mit (9) lautet (8)

$$k \leq 3f + p - 6. \quad (10)$$

Kombination von (1) und (10) liefert

$$2f \geq 5 + e - p. \quad (11)$$

Aus den Gleichungen (2) und (4) folgt andererseits

$$f \leq 2e - p - 2. \quad (12)$$

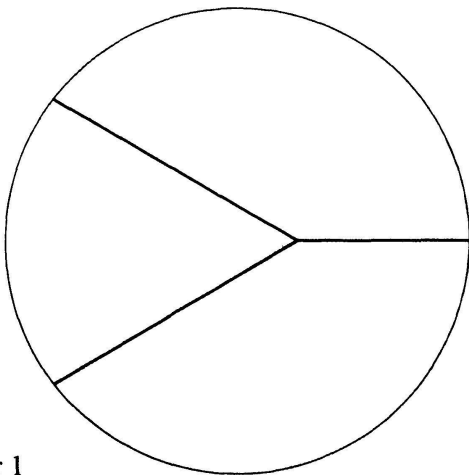
Will man ein konvexes p -Eck P mit $e - p > 0$ inneren Ecken in f konvexe Polygone P_j zerlegen, so stellen die Beziehungen (11) und (12) notwendige Bedingungen dar, denen die Werte p, e, f genügen müssen. Weil wir auch die Umkehrung zeigen können, gilt

Satz 2. *Ein konvexes p -Eck lässt sich genau dann in f konvexe Polygone zerlegen, so dass das entstehende Netz $e - p > 0$ innere Ecken enthält, wenn die Beziehungen (11) und (12) erfüllt sind.*

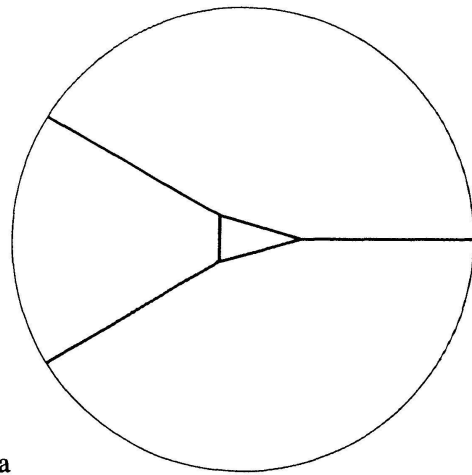
Beweis. Wir haben noch folgendes zu zeigen: Wenn positive ganze Zahlen p, e, f den Beziehungen (6), (11) und (12) genügen, dann lassen sich konvexe Polygone $P_1, \dots, P_f$ finden, aus denen sich ein konvexes p -Eck P mit einer Gesamteckenzahl e zusammensetzen lässt. Um dies zu beweisen, zeigen wir zunächst, dass zu jedem Tripel positiver ganzer Zahlen p, e, f , die der Forderung

$$f \geq 2,5 + \frac{e-p}{2}, f \text{ minimal} \quad (11')$$

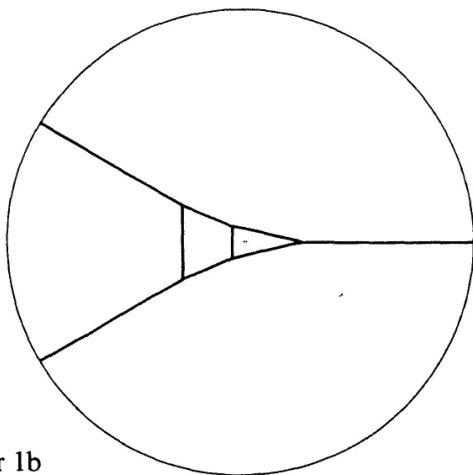
genügen, sich konvexe Polygone $P_1, \dots, P_f$ finden lassen, aus denen sich ein konvexes p -Eck mit einer Gesamteckenzahl e zusammensetzen lässt. Wir beweisen die geometrische Realisierbarkeit von (11') durch Induktion nach $e - p$: Sei $e - p = 1$. Aus (11') folgt $f = 3$. Die Realisierbarkeit erkennt man aus Figur 1. (Das p -Eck ist in der Figur 1 als Kreis gezeichnet, weil die Realisierbarkeit unabhängig von dem Wert von $p \geq 3$ sein muss.) Nun lassen wir $e - p$ jeweils um 2 wachsen. Dann wächst nach (11') f jeweils um 1. Die Möglichkeit der Realisierung erkennt man aus den Figuren 1a und 1b. Damit ist die Realisierbarkeit von (11') für alle ungeraden Werte von $e - p$ klar. Betrachten wir jetzt den Fall $e - p = 2$. Aus (11') folgt $f = 4$. Die Realisierbarkeit erkennt man aus Figur 2. Nun lassen wir $e - p$ jeweils um 2 wachsen. Dann wächst nach (11') f jeweils um 1. Die Möglichkeit der Realisierung



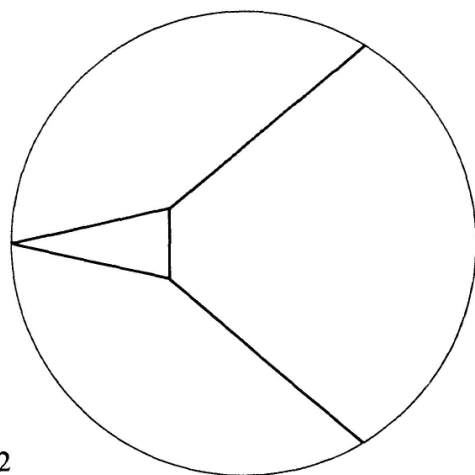
Figur 1



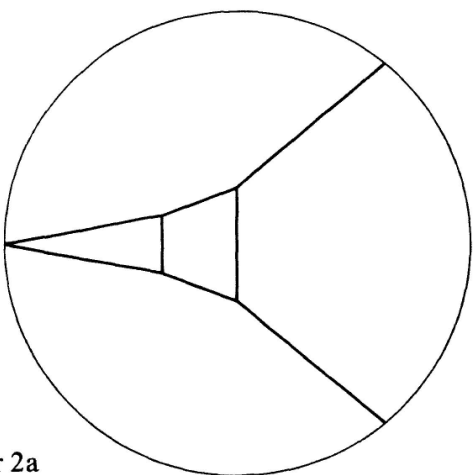
Figur 1a



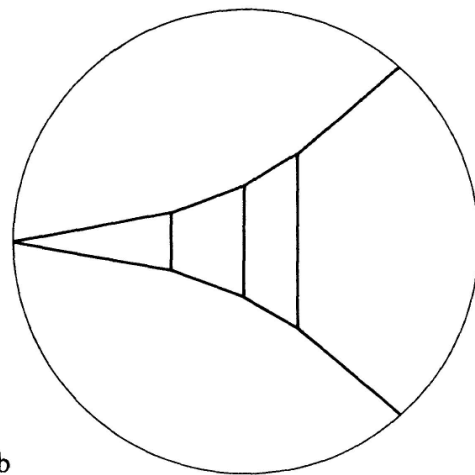
Figur 1b



Figur 2



Figur 2a



Figur 2b

erkennt man aus den Figuren 2a und 2b. Damit ist auch für alle geraden Werte von $e-p$ die Realisierbarkeit von (11') klar. Zerlegt man die in der so konstruierten Realisierung von (11') auftretenden Polygone mit mehr als drei Ecken durch sich nicht schneidende Diagonalen in Dreiecke, so erhöht sich die Flächenzahl f . Diese Flächenzahl kann man so lange erhöhen, bis das Polygon P in lauter Dreiecke zerlegt ist. Die Anzahl dieser Dreiecke ist wegen (4) gleich der rechten Seite von (12).

Satz 2 macht eine Aussage über die Realisierbarkeit konvexer Polygonzerlegungen in Abhängigkeit von p, e, f . Nun wollen wir anstelle von f die Werte f_i ($i \geq 3$) ins Spiel bringen. Aus (2), (4) und (11) ergibt sich

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 - f_7 - 2f_8 - \dots \geq 12 - p. \quad (13)$$

Die Beziehungen (4) und (13) stellen in dem durch (6) definierten Fall B notwendige Bedingungen dar für die Anzahlen f_i der konvexen i -Ecke, aus denen sich das konvexe Polygon P bei vorgegebenen Werten für p und e zusammensetzen lässt. Wieder stellt sich die Frage nach der Umkehrung. Sind (4), (6) und (13) hinreichende Bedingungen in dem Sinn, dass sich zu allen nicht-negativen ganzzahligen Werten für $p, e, f_3, f_4, f_5, \dots$, welche den Beziehungen (4), (6) und (13) genügen,

eine konvexe Polygonzerlegung realisieren lässt? Diese Frage ist zu verneinen, wie schon ein einfaches Beispiel zeigt. Gegeben sei $p=3$, $e=6$, $f_3=2$, $f_4=1$, $f_5=1$, $f_h=0$ ($h \geq 6$). Die genannten Werte erfüllen ersichtlich die Gleichung (4) und die Ungleichungen (6) und (13). Aber es kann keine passende Polygonzerlegung dazu geben, wie man durch folgende Überlegung sieht: Wir wählen im Innern eines Dreiecks P mit den Ecken E_1, E_2, E_3 drei Punkte (innere Ecken) A, B, C derart, dass E_1ABCE_2 ein konvexes Fünfeck ist. Ohne dieses Fünfeck zu zerstören können wir (bei beliebigem Verbinden von Ecken) kein konvexes Viereck finden.

Weil, wie dieses Gegenbeispiel lehrt, (4), (6) und (13) noch keine hinreichenden Bedingungen für die Realisierbarkeit sind, erhebt sich die Frage: Welche Forderungen muss man zusätzlich stellen, um hinreichende Bedingungen zu erhalten? Mit dem folgenden Satz soll ein erster Schritt zur Beantwortung dieser Frage gemacht werden.

Satz 3. Seien $p, e, f_3, f_4, f_5, \dots$ nicht-negative ganze Zahlen mit den Eigenschaften

- a) sie genügen der Gleichung (4),
- b) es ist $e > p$,
- c) alle f_l sind für $l \geq 4$ Null, bis auf höchstens eines, das wir ggf. f_y nennen,
- d) $f_y = 1$,
- e) $e \geq y + 1$.

Dann gibt es eine dazu passende Zerlegung eines konvexen p -Ecks P in konvexe Polygone $P_1, \dots, P_f$.

Für den Beweis unterscheiden wir zwei Hauptfälle.

Fall 1. Für $l \geq 4$ sind alle f_l Null. Dann wird aus (4)

$$f_3 = 2e - p - 2. \quad (4')$$

Die Realisierbarkeit dieser Gleichung (4') folgt unmittelbar aus dem Beweis von Satz 2.

Fall 2. Es gibt ein $f_y = 1$ ($y \neq 3$). Die Gleichung (4) lautet nun

$$f_3 = 2e - p - y. \quad (4'')$$

Fall 2.1. $y < p - 1$.

P sei ein beliebiges konvexes p -Eck. Man zeichne ein konvexes y -Eck P_1 in P derart, dass P_1 und P in $y - 1$ Kanten übereinstimmen. Alle inneren Eckpunkte legen wir in das konvexe Vieleck $P \setminus P_1$. Es besitzt $p - y + 2$ Randecken, enthält $e - p$ innere Eckpunkte und lässt sich (gemäss Fall 1) in

$$f_3 = 2(p - y + 2 + e - p) - (p - y + 2) - 2 = 2e - p - y \quad (14)$$

Dreiecke zerlegen – in Übereinstimmung mit (4'').

Fall 2.2. $y \geq p - 1$.

Zunächst betrachten wir den Sonderfall $e = y + 1$. Dann muss nach (4'') gelten

$$f_3 = y - p + 2. \quad (15)$$

Die Realisierbarkeit von (15) erkennt man leicht: P sei ein beliebiges konvexes p -Eck. Man zeichne ein konvexes y -Eck P_1 in P derart, dass P_1 und P in $p-2$ Kanten übereinstimmen. Die $y-p+2$ innerhalb P liegenden Seiten von P_1 bilden zusammen mit der in P_1 nicht enthaltenen Ecke von P $y-p+2$ Dreiecke. Der allgemeine Fall $e \geq y+1$ wird so geklärt, dass man zu obiger Figur innere Eckpunkte hinzufügt und feststellt, dass sich dadurch die Anzahl der Dreiecke um das Doppelte der Anzahl der hinzugefügten Eckpunkte vergrößert – in Übereinstimmung mit (4'').

Es erscheint bemerkenswert darzulegen, dass die auf die Fälle 1 bzw. 2 bezogene Ungleichung (13), nämlich

$$3f_3 \geq 12 - p \quad (13')$$

bzw.

$$3f_3 \geq 6 - p + y \quad (13'')$$

aus (4), (6) und e) folgt: Weil nur ganzzahlige Werte in Frage kommen, bedeutet (6)

$$e \geq p + 1. \quad (16)$$

In der Ebene gibt es keine Zweiecke; daher ist

$$2p \geq 6. \quad (17)$$

Aus (16) und (17) folgt

$$3e \geq 9 + p. \quad (18)$$

Setzt man (18) in (4') ein, so erhält man (13').

Aus (16) und e) folgt

$$3 + 2y + p \leq 3e. \quad (19)$$

Setzt man (19) in (4'') ein, so erhält man (13'').

Also ist (unter den Voraussetzungen a) bis d) des Satzes 3 die Forderung e) schärfer als (13). Dass man in Satz 3 nicht einfach e) durch (13) ersetzen kann, zeigt das Gegenbeispiel $p=3, e=6, f_3=3, f_4=f_5=0, f_6=1, f_h=0 (h \geq 7)$.

Ändert man die ursprüngliche Fragestellung so ab, dass man e und f_6 nicht vorgibt, sondern geeignete Werte annehmen lässt, dann kann man unschwer aus dem Theorem von EBERHARD [1] und analogen Sätzen [2, 3] Ergebnisse für konvexe Polygonzerlegungen herleiten. Das Theorem von Eberhard zum Beispiel besagt: Für alle nicht-negativen ganzen Zahlen $f_3, f_4, f_5, f_7, f_8, \dots$, die der Gleichung

$$\sum_{i \geq 3} (6-i)f_i = 12 \quad (20)$$

genügen, gibt es ein dreidimensionales konvexes Polyeder mit lauter 3wertigen Ecken, das jeweils f_i konvexe i -Ecke als Seitenflächen besitzt. Nun ist es bezüglich jeder Seitenfläche möglich, ein Schlegel-Diagramm des Polyeders zu zeichnen. Ein Schlegel-Diagramm stellt eine Zerlegung eines konvexen Polygons P in konvexe Polygone P_j dar. Aus dem Theorem von Eberhard folgt also:

Es seien f_i ($i \geq 3$, $i \neq 6$) nicht-negative ganze Zahlen, die der Gleichung (20) genügen, und f_j sei ein nicht-verschwindendes dieser f_i . Dann gibt es dazu ein konvexes j -Eck P , das in konvexe Polygone so zerlegt werden kann, dass die Anzahl der i -Ecke ($i \neq j$) f_i ist; die Anzahl der j -Ecke ist $f_j - 1$. Dabei sind alle Ecken 3wertig.

Gerd Blind, Universität Stuttgart

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] V. EBERHARD, *Zur Morphologie der Polyeder* (Leipzig 1891).
- [2] B. GRÜNBAUM, *Some Analogues of Eberhard's Theorem on Convex Polytopes*, Israel J. Math. 6, 398–411 (1968).
- [3] S. JENDROŁ and E. JUCOVIČ, *On a Conjecture by B. Grünbaum*, Discrete Mathematics 2, 35–49 (1972).

Über gewisse n -komponierbare Graphen

Im folgenden sei mit Γ stets ein endlicher, schlichter und zusammenhängender Graph¹⁾ bezeichnet, welcher mindestens eine Kante enthält.

Es werde der Begriff des Kompositionsgrades²⁾ eines Graphen eingeführt, welcher sich auf die «Zusammensetzung» eines Graphen aus besonders «einfachen» Graphen bezieht.

Unter dem *Kompositionsgrad* $c(\Gamma)$ eines Graphen Γ sei die kleinste unter den natürlichen Zahlen z verstanden, für welche Γ eine Darstellung

$$\Gamma = \dot{\bigcup}_{i=1}^z B_i$$

als Vereinigung von geeigneten Bäumen $B_i \subseteq \Gamma$ besitzt. Ein n -komponierbarer Graph sei ein Graph Γ mit $c(\Gamma) = n$.

Für jeden Graphen Γ besteht nun die Abschätzung

$$a_1(\Gamma) \leq c(\Gamma) (a_0(\Gamma) - 1), \quad (1)$$

wobei mit $a_0(\Gamma)$ bzw. $a_1(\Gamma)$ die Anzahl der Knotenpunkte bzw. Kanten von Γ

¹⁾ Die Definitionen aller in der vorliegenden Note verwendeten und nicht näher definierten graphentheoretischen Begriffe findet man bei K. WAGNER [1].

²⁾ Man vergleiche dazu auch [3] und [4].