

# Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **31 (1976)**

Heft 4

PDF erstellt am: **26.04.2024**

## Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Eigenvalues of Real Symmetric Matrices

Nearly every linear algebra book contains a proof that the characteristic roots of a real symmetric matrix  $A$  are real. The proofs use either a complex eigenvector of  $A$  or the compactness of the unit sphere to find a vector which maximizes the quadratic form  $\langle x, Ax \rangle$ . The following is a new direct proof not using complex numbers or compactness, indeed not even using matrices.

**Proposition.** All characteristic roots of a symmetric operator on a real finite dimensional inner product space are real.

*Proof.* If  $A$  is symmetric and  $p(x) = (x-a)^2 + b$  is a factor of the minimal polynomial of  $A$ , there is a vector  $v \neq 0$  such that  $p(A)v = 0$ . Then  $0 \leq \langle (A-aI)v, (A-aI)v \rangle = \langle v, (A-aI)^2 v \rangle = (-b) \langle v, v \rangle$  so  $b \leq 0$  and  $p$  has real roots. If  $w$  is an eigenvector for one of these roots the orthogonal complement of  $w$  is  $A$ -invariant and  $A$  restricted to it is symmetric. By induction on dimension the proof as well as the diagonalization of  $A$  is completed.

Note that the last two sentences of the proof are needed only to guarantee (without using complex eigenvectors) that all the irreducible factors of the characteristic polynomial are also factors of the minimal polynomial.

Ladnor Geissinger, University of North Carolina, USA

## Aufgaben

**Aufgabe 745.** In einem ebenen Quadratgitter bezeichne  $A$  eine «Figur», d.h. eine nichtleere endliche Menge von Gitterquadraten,  $n(A)$  deren Anzahl. Weiter sei  $q^2(A)$  die Anzahl der Gitterquadrate in einem kleinsten,  $A$  enthaltenden achsenorientierten Quadrat im Gitter. Schliesslich setze man  $d(A) := n(A)/q^2(A)$ . Es wird nun eine Folge  $A_0, A_1, \dots, A_m, \dots$  von Figuren wie folgt definiert:  $A_0$  ist eine beliebige Ausgangsfigur;  $A_m$  entsteht aus  $A_{m-1}$ , indem man jedes Gitterquadrat hinzufügt, das mit einem solchen von  $A_{m-1}$  mindestens eine Gitterstrecke gemeinsam hat. Beweise, dass  $d(A_m) \rightarrow \frac{1}{2} (m \rightarrow \infty)$ , unabhängig von  $A_0$ .

P. Wilker, Bern

*1. Lösung.*  $W^k$  sei ein Quadrat im Gitter mit der Seitenzahl  $k$ . Das Glied  $W_m^k$  der mit  $W^k$  beginnenden Folge besitzt  $n(W_m^k) = 2m(m-1) + 4km + k^2$  Gitterquadrate und sein einhüllendes Quadrat hat deren  $q^2(W_m^k) = (k+2m)^2$ . Beides ist leicht einzusehen.

Sei nun  $A_0$  eine beliebige Ausgangsfigur,  $W^1$  ein Gitterquadrat innerhalb  $A_0$  und  $W^k$  ein kleinstes,  $A_0$  enthaltendes Quadrat im Gitter. Die aus diesen drei Figuren entstehenden Folgen sollen  $A_m, W_m^1, W_m^k$  lauten. Aus  $W^1 \subseteq A_0 \subseteq W^k$  folgt, wie sofort ersichtlich,  $W_m^1 \subseteq A_m \subseteq W_m^k$  und hieraus

$$n(W_m^1) = 2m^2 + 2m + 1 \leq n(A_m) \leq 2m^2 + (4k-2)m + k^2 = n(W_m^k).$$

Weiter ist  $(1+2m)^2 \leq q^2(A_m) = (k+2m)^2$ , und man erhält durch Kombination dieser Ungleichungen

$$\frac{2m^2 + 2m + 1}{(2m+k)^2} \leq d(A_m) \leq \frac{2m^2 + (4k-2)m + k^2}{(2m+1)^2}.$$

Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Ch. Meier, Bern

**2. Lösung** (mit  $N$ -dimensionaler Verallgemeinerung). Die  $N$ -dimensionale Verallgemeinerung lautet: Eine «Figur»  $A$  ist eine nichtleere endliche Menge von Gitterwürfeln der Kantenlänge 1;  $q(A)$  sei die Kantenlänge eines kleinsten  $A$  enthaltenden Würfels aus Gitterwürfeln.  $A'$  entstehe aus  $A$  durch Hinzunahme aller Einheitswürfel, welche an wenigstens einer  $(N-1)$ -dimensionalen Seitenfläche von einem Element von  $A$  anliegen. Ein Minimalwürfel zu  $A$  muss wenigstens ein Paar von gegenüberliegenden  $(N-1)$ -dimensionalen Seitenflächen derart haben, dass an jeder von ihnen wenigstens ein Element  $v$  bzw.  $w$  von  $A$  anliegt; denn sonst wäre dieser Würfel nicht minimal. Beim Übergang zu  $A'$  sorgen  $v'$  und  $w'$  dafür, dass  $q(A') = q(A) + 2$ , also, bei  $A_m = A'_{m-1}$

$$q(A_m) = q(A_0) + 2m. \quad (1)$$

Ein achsenparalleler Würfel der Kantenlänge  $k$  enthält (als konvexe Hülle der Seitenflächen-Mittelpunkte) ein verallgemeinertes «Oktaeder» der Diagonalenlänge  $k$  mit dem Volumen  $k^N/N!$ . Derselbe Würfel ist enthalten in einem dazu ähnlichen und ähnlich gelegenen «Oktaeder» der Diagonalenlänge  $2k$ , mit dem Volumen  $(2k)^N/N!$ . Man betrachte nun einen einzelnen Gitterwürfel  $w_0$  aus einer Figur  $A_0$  und die aus ihm entstehenden Figuren  $w'_0 = w_1 \subseteq A_1, \dots, w_m \subseteq A_m$ ;  $w_1$  enthält ein Oktaeder der Diagonalenlänge 2, und bei jedem Schritt wächst die Diagonalenlänge des in  $w_m$  und damit in  $A_m$  enthaltenen «Oktaeders» um 2, so dass für die Anzahl der Einheitswürfel in  $A_m$  gilt

$$n(A_m) \geq \frac{(2m)^N}{N!}. \quad (2)$$

Andererseits liegt der  $A_0$  umbeschriebene Minimalwürfel der Kantenlänge  $q(A_0)$  in einem «Oktaeder» der Diagonalenlänge  $2q(A_0)$ ,  $A_1$  in einem solchen einer um 2 vermehrten Diagonalenlänge, und  $A_m$  schliesslich in einem «Oktaeder» der Diagonalenlänge  $2(q(A_0) + m)$ , also

$$n(A_m) \leq \frac{2^N (q(A_0) + m)^N}{N!} = \frac{2^N m^N}{N!} \left(1 + \frac{q(A_0)}{m}\right)^N. \quad (3)$$

Das Verhältnis der Anzahl der Gitterwürfel von  $A_m$  zum Volumen des achsenparallelen umbeschriebenen Minimalwürfels ist nach (1)

$$d(A_m) = \frac{n(A_m)}{(q(A_0) + 2m)^N} = \frac{n(A_m)}{2^N m^N \left(1 + \frac{q(A_0)}{2m}\right)^N}. \quad (4)$$

Aus (2) und (3) erhält man

$$\frac{1}{N! \left(1 + \frac{q(A_0)}{2m}\right)^N} \leq d(A_m) \leq \frac{1}{N!} \left[ \frac{1 + \frac{q(A_0)}{m}}{1 + \frac{q(A_0)}{2m}} \right]^N,$$

und daraus schliesslich

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(A_m) = \frac{1}{N!}.$$

*Bemerkung.* Unabhängig von der Ausgangsfigur nähert sich  $A_m$  immer mehr einem «Oktaeder».

D. Laugwitz, Darmstadt, BRD

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), J. Binz (Bolligen BE), Ch. Blatter (Zürich), L. Kuipers (Mollens VS), D. Laugwitz (Darmstadt, BRD; 2. Lösung), O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), Hj. Stocker (Wädenswil ZH) und M. Vowe (Therwil BL).

**Aufgabe 746.** Eine Ungleichung am ebenen Dreieck mit Gleichheit genau für das gleichseitige Dreieck habe die Gestalt

$$0 < X = Ls^2 \leq Mr^2 + NrR + PR^2 = Y,$$

worin  $L, M, N, P$  von  $s, r, R$  unabhängige reelle Zahlen sind. Man bestimme bei festem  $u > 0$  und festem  $v < 2u$  die grösstmögliche Konstante  $k \geq 0$ , welche die Verschärfung

$$X + k(R - 2r)(uR - vr) \leq Y$$

von  $X \leq Y$  gestattet.

I. Paasche, München, BRD

*Lösung des Aufgabenstellers.* Auf das unnötig einschränkende Wort «genau» der Aufgabenstellung verzichten wir. In Spezialfällen bestimmt sich  $k = k_{\max}$  leicht:  $4s^2 + k(R - 2r)R \leq n^2r^2 + m^2rR + 27R^2$  ( $m, n$  reell) zeigt  $k_{\max} = 11$  wegen des möglichen ausgearteten Grenzfalles  $s:R:r = 2:1:0$ , bei dem übrigens Gleichheit  $4s^2 = 16R^2$  eintritt. In  $s^2 + k(R - 2r)R \leq 3r^2 + 4rR + 4R^2$  ist aus demselben Grunde  $k_{\max} = 0$ , usw. Im allgemeinen Fall stützen wir uns auf [1], Theorem 1. Die Ungleichung

$$0 < Ls^2 + k(R - 2r)(uR - vr) \leq Mr^2 + NrR + PR^2 \quad (k \geq 0), \quad (0)$$

also

$$0 < Ls^2 \leq (M - 2vk)r^2 + (vk + N + 2uk)rR + (-uk + P)R^2 \quad (1)$$

bedeutet nach Division durch  $L$  genau

$$0 < s^2 \leq (3 - 2T)r^2 + (T + 4 - 2U)rR + (U + 4)R^2 \quad (2)$$

mit geeigneten  $T, U$ , weil Gleichheit für  $s:R:r = 3\sqrt{3}:2:1$  (gleichseitiges Dreieck) besteht:

$$27 = (3 - 2T)1 - (T + 4 - 2U)2 + (U + 4)4.$$

Nach [1] Theorem 1 zerfällt die Gesamtheit der für alle ebenen Dreiecke gültigen Ungleichungen (2) in die beiden folgenden Klassen:

$$\begin{array}{ll} (c_0) & T \geq 0 \text{ und } U \geq 0 \quad \text{Klasse } c_0 \\ (d_0) & T < 0 \text{ und } U \geq T^2(4 - 2T)^{-1} > 0 \quad \text{Klasse } d_0. \end{array}$$

Andere allgemein gültige Ungleichungen (2) mit sonst unbeschränkten variablen  $T, U$  gibt es nicht. Für unsere Zwecke ist nun ein anderer, ebenfalls erschöpfender Klassenzerfall nicht nur vorteilhaft, sondern einschlägig: Jedes  $t$  aus  $0 \leq t \leq 2$  gestattet die beiden komplementären Klassen

$$\begin{array}{ll} (c_t) & T + tU \geq 0 \text{ und } U \geq 0 \quad \text{Klasse } c_t \\ (d_t) & T + tU < 0 \text{ und } U \geq T^2(4 - 2T)^{-1} > 0 \quad \text{Klasse } d_t. \end{array}$$

Wir behaupten: Bei variablem  $t$  ist die Klasse  $c_2$  maximal, ihr Komplement  $d_2$  also minimal. Beweis: Für  $T = -2U - \varepsilon \leq -2U$  besagt  $U \geq T^2(4 - 2T)^{-1}$  offenbar  $4U \geq 2U\varepsilon + \varepsilon^2 \geq 0$ . Jetzt erkennt man:

$$\begin{array}{l} \varepsilon = 0 \text{ bewirkt } U = 0, \text{ also Klasse } c_2 \\ \varepsilon > 0 \text{ bewirkt } U > 0, \text{ also Klasse } d_2. \text{ Beweisende.} \end{array}$$

Für die Tatsache, dass (0), (1), (2) für gewisse  $k$  in Klasse  $c_2$  oder  $d_2$  liegt, verabreden wir eine naheliegende Sprechweise: die betreffenden Werte der Variablen  $k \geq 0$  liegen in  $c_2$  oder  $d_2$ , kurz  $k$  in  $c_2$  oder  $d_2$  (mindestens also  $k = 0$ ). Wenn nun  $k = 0$  mit Parametern  $T', U'$  in  $c_2$  liegt, so kann es maximal sein. Dann liegt für alle  $u > 0$  und  $2u - v > 0$  kein  $k$  in  $d_2$ . Gibt es jedoch eine Verschärfung  $k > 0$  mit Parametern  $T, U$ , so kann dieses  $k$  (nach  $k = 0$  in  $c_2$ ) jeder der beiden Extremalklassen  $c_2$  und  $d_2$  angehören: Gemäss (1) (2) ( $c_2$ ) ( $d_2$ ) folgt aus  $L(T' + 2U') = (3L - M)/2 + 2(P - 4L) \geq 0$  nur  $L(T + 2U) = (3L - M + 2vk)/2 + 2(P - 4L - uk) \geq 0$ , woraus Klasse  $c_2$  ( $\geq$ ) oder  $d_2$  ( $<$ ) ablesbar ist. Liegt jedoch  $k = 0$  in  $d_2$ , so auch jede mögliche Verschärfung  $k > 0$ . Dann tritt  $c_2$  überhaupt nicht auf. Wir zeigen: Das optimale  $k = k_{\max}$  existiert (ausser im beiseitegelassenen Trivialfall  $u = v = 0$ , wo jedes  $k \geq 0$  erlaubt ist) und lässt sich sogar explizit als

Funktion von  $u$  und  $v$  bestimmen, indem  $T, U$  durch  $u, v, k$  und drei der  $L, M, N, P$  ausgedrückt werden: Insgesamt zeigt der Koeffizientenvergleich in (1) (2)

$$\begin{array}{llll}
 M - 2vk & = & 3L - 2LT & \cdot 1 \\
 N + 2uk + vk & = & 4L + LT - 2LU & \cdot 2 \\
 P - uk & = & 4L + LU & \cdot 4 \\
 M + 2N + 4P + 0 + 0 & = & 27L + 0 + 0 & (\text{gewichtete Summenprobe}). \quad (3)
 \end{array}$$

Liegt nun irgendein  $k \geq 0$  in (der Klasse «kleiner»  $k$ )  $c_2$ , so findet man das grösste  $k (=k_{\max})$  aus  $c_2$  so: Aus dem Ungleichungspaar ( $c_2$ ) folgt das Paar  $0 \leq 2L(T + 2U) = -13L - M + 4P - 2(2u - v)k$  und  $0 \leq LU = P - uk - 4L$ , und hieraus vermöge (3) das Paar  $k \leq (-20L + N + 4P)/(2u - v)$  und  $k \leq (P - 4L)/u$ . Das grösste noch in  $c_2$  liegende  $k$  ist also

$$k = \min\left(\frac{-20L + N + 4P}{2u - v}, \frac{P - 4L}{u}\right) \leq k_{\max}; \text{ letzteres in } c_2 (=) \text{ oder } d_2 (<). \quad (4)$$

Die beiden Nenner sind nach Voraussetzung  $> 0$ . Die beiden Zähler sind  $\geq 0$ , weil auch  $k = 0$  in  $c_2$  liegt. Probe:  $(-20L + N + 4P)/L = -20 + (T' + 4 - 2U') + 4 \cdot (4 + U') = T' + 2U' = \geq 0$  und  $(P - 4L)/L = (4 + U') - 4 = U' \geq 0$ . - Liegt jedoch (das vorerst nur vermutete)  $k_{\max}$  nicht in  $c_2$ , was sich schon durch irgendein  $k$  aus  $d_2$  ankündigt, so untersucht man  $d_2$  analog mittels (1), (2), (3), ( $d_2$ ):  $(-20L + N + 4P)/(2u - v) < k$  und

$$0 < \frac{LT \cdot LT}{4L - 2LT} = \frac{(M - 3L - 2vk)^2}{4(M + L - 2vk)} \leq P - uk - 4L = LU.$$

Hieraus ist  $k_{\max} \geq 0$  bestimmbar als die grössere der (für  $v \neq 0$ ) beiden Wurzeln  $k$  der höchstens quadratischen Gleichung in  $k$  (für sie ist  $-20L + N + 4P < 2uk - vk$ )

$$(M - 3L - 2vk)^2 = 4(M + L - 2vk)(P - uk - 4L). \quad (5)$$

Dass die Diskriminante  $\geq 0$  ist, wird durch [1] gesichert, kann aber auch hier durch Rechnung bestätigt werden. - Beispiele:  $4s^2 + k(R - 2r)(R + r) \leq 27R^2$  hat  $k_{\max} = 5 + (1/3)\sqrt{249} \approx 10,26$ ; das ist eine in  $d_2$  liegende Wurzel  $k$  der Gleichung  $3k^2 - 30k - 8 = 0$ . Das grösste  $k$  aus  $c_2$  ist  $k = 28/3 = 9,3 \dots$  Selbstverständlich ist (5) wegen des ausgeschlossenen Trivialfalles  $u = v = 0$  stets nach  $k$  auflösbar. Aber die so gefundene grösste Wurzel  $k$  braucht nicht in  $d_2$  zu liegen und braucht dann auch nicht  $k_{\max}$  zu sein. Dieser Fall tritt ein bei  $k = 2$  (in  $c_2$ ) für  $4s^2 + k(R - 2r)R \leq 27R^2$ . Auch  $k_{\max} = 11$  liegt in  $c_2$ , so dass  $d_2$  nicht vorkommt. Dagegen ist die grössere der beiden Wurzeln  $k = 0$  und  $-4/3$  von (5) im Fall  $s^2 + k(R - 2r)R \leq 3r^2 + 4rR + 4R^2$  wohl in  $c_2$ , stellt aber zugleich  $k_{\max}$  dar. Auch hier kommt  $d_2$  nicht vor. In praxi hat man zuerst (5) nach  $k$  aufzulösen, es sei denn  $k_{\max}$  sei anderweitig unmittelbar evident, wie eingangs durch die Ausartung  $s:R:r = 2:1:0$ . Liegt die einzige oder die grössere Wurzel  $k$  jedoch in  $c_2$ , so auch  $k_{\max}$ , gewinnbar aus (4).

*Anmerkung.* Beliebig viele bekannte und weitere Dreiecksungleichungen (auch in  $a, b, c$ ;  $r_a, r_b, r_c$ ;  $s_a, s_b, s_c = s - a, s - b, s - c$ ; usw.) können mittels (4) (5)  $k$ -verschärft werden, falls sie nicht schon  $k$ -optimal sind ( $k_{\max} = 0$ ). – Die nicht verlangten, aber beachtenswerten Grenzfälle  $u = 0 > v$  und  $2u - v = 0$  schliessen sich unserer Methode stetig an. Wenn man will, verwendet man dann bei (4) in bekannter Art das praktische Symbol  $+\infty$ .

- [1] FRUCHT/KLAMKIN, *On Best Quadratic Triangle Inequalities*, Geometriae Dedicata 2, 341–348 (1973).

Eine Teillösung sandte M. Vowe (Therwil BL).

**Aufgabe 747.** Es sei  $a$  eine ganze Zahl. Für welche natürlichen Zahlen  $n \geq 3$  wird der Quotient

$$A_n := \frac{(n-3)!(n-1)[an^2 + (2a+3)n - 2] + 1}{n(n+2)}$$

ganzzahlig?

I. Paasche, München, BRD

*Lösung.* Es bezeichne  $B_n$  den Zähler von  $A_n$ . Für jedes  $n \geq 3$  ist  $B_n$  ungerade. Somit ist jede natürliche Zahl  $n$  der verlangten Art ungerade, und  $n$  und  $n+2$  sind teilerfremd. Also gilt  $n(n+2) \mid B_n \Leftrightarrow n \mid B_n$  und  $(n+2) \mid B_n$ . Man bestätigt leicht das Bestehen der Kongruenzen

$$B_n \equiv (n-3)!(n-1)(-2) + 1 \equiv (n-1)! + 1 \pmod{n}, \quad (1)$$

$$B_n \equiv (n-3)!(n-1)(-8) + 1 \equiv (n+1)! + 1 \pmod{n+2}. \quad (2)$$

Nach dem Satz von Wilson (man beachte, dass auch dessen Umkehrung gilt) folgt aus (1) und (2)

$$B_n \equiv 0 \pmod{n} \Leftrightarrow n \text{ ist eine Primzahl},$$

$$B_n \equiv 0 \pmod{n+2} \Leftrightarrow n+2 \text{ ist eine Primzahl}.$$

Die Antwort lautet also:  $A_n$  ist genau dann ganzzahlig, wenn  $n$  und  $n+2$  Primzahlen sind.

J. Fehér, Pécs, Ungarn

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), G. Bercea (München, BRD), J. Binz (Bolligen BE), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), K. Grün (Linz, Österreich), H. Harborth (Braunschweig, BRD), L. Kuipers (Mollens VS), R. Tichy (Wien, Österreich), M. Vowe (Therwil BL) und A. Wieckowski (Poznań, Polen).

**Aufgabe 748.** Für natürliche Zahlen  $n, k$  bezeichne  $[(n+1)(n+2) \cdots (n+k)]'$  das Produkt der Nichtprimzahlen in der Folge  $n+1, n+2, \dots, n+k$ . Man zeige, dass  $6! = 8 \cdot 9 \cdot 10$  die einzige Lösung der Gleichung  $n! = [(n+1)(n+2) \cdots (n+k)]'$  ist.  
P. Erdős, Budapest, Ungarn

*Lösung.* Aus  $n! = [(n+1)(n+2) \cdots (n+k)]'$  kann man die 2 möglichen Werte von  $k$  bei gegebenem  $n$  berechnen, indem man für beide Glieder die höchste Potenz von 2 bestimmt, die das Glied teilt. Für kleine Werte von  $n$ , z. B.  $n \leq 20$ , findet man sofort, dass nur  $n=6$  eine Lösung ist.

Es ist klar, dass die Gleichung falsch ist, wenn es eine Primzahl  $p > 3$  gibt, so dass

$$\frac{n+k}{4} < p \leq \frac{n+k}{3}; \quad (*)$$

denn in diesem Falle können die  $p$ -Potenzen auf beiden Seiten nicht gleich sein. Aus

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x} \left(1 + \frac{1}{2 \log x}\right) \text{ für } x \geq 59,$$

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x} \left(1 + \frac{3}{2 \log x}\right) \text{ für } x > 1,$$

[s. J. Barkley Rosser and L. Schoenfeld, Approximate formulas for some functions of prime numbers, Illinois J. of Math. 6, 64–94 (1962)] folgt, dass

$$\pi\left(\frac{4}{3}x\right) > \pi(x) \text{ für } x > 100. \quad (**)$$

Durch Vergleichung mit einer Liste von Primzahlen folgt dann sogar (\*\*) für  $x \geq 9$ . Also gibt es eine Primzahl  $p$  mit der Eigenschaft (\*) für  $n > 20$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.

J. H. van Lint, Eindhoven, Niederlande

Weitere Lösungen sandten H. Harborth (Braunschweig, BRD) und H. Warncke (Porto Alegre, Brasilien).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis **10. Februar 1977** an **Dr. H. Kappus**. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S.67), Problem 625B (Band 25, S.68), Problem 645A (Band 26, S.46), Problem 672A (Band 27, S.68), Aufgabe 680 (Band 27, S.116), Problem 724A (Band 30, S.91), Problem 764A (Band 31, S.44).

**Aufgabe 769.** In einer Ebene  $\varepsilon$  seien 3 Punkte  $A_1, A_2, A_3$  gegeben. Es gibt genau zwei gleichwinklige Kreisbogendreiecke in  $\varepsilon$  mit den Ecken  $A_i$  und Winkeln  $\alpha_i = \alpha$ ,  $0 \leq \alpha < \pi$ . Man bestimme die Kugel  $K$  mit Zentrum in  $\varepsilon$  so, dass bei der stereographischen Projektion von  $\varepsilon$  auf  $K$  jene beiden Dreiecke in zwei kongruente, gleichseitige Kreisbogendreiecke abgebildet werden.

C. Bindschedler, Küsnacht

**Aufgabe 770.** Let  $\lambda$  be an integer  $\geq 1$ . A positive integer  $n$  is called  $\lambda$ -perfect, if  $\sigma(n) = 2\lambda n$ , where  $\sigma(n)$  denotes the sum of all positive divisors of  $n$ . Prove the following results for odd  $\lambda$ -perfect numbers:

- (i) If  $\lambda$  is odd, then any odd  $\lambda$ -perfect number is of the Form  $p^a k^2$ , where  $p$  is a prime  $\equiv 1 \pmod{4}$ ,  $a \equiv 1 \pmod{4}$  and  $(p, k) = 1$ .
- (ii) If  $\lambda$  is odd and  $\not\equiv 0 \pmod{3}$ , then any odd  $\lambda$ -perfect number is of the form  $12t+1$  or  $36t+9$ .
- (iii) If  $n$  is of the form  $12t+1$ , then  $n = p^a k^2$  with  $p$  prime and  $\equiv 1 \pmod{12}$  and  $a \equiv 1$  or  $9 \pmod{12}$ .

D. Suryanarayana, Waltair, India

**Aufgabe 771.** Es seien  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die Seitenlängen eines beliebigen ebenen Dreiecks. Man beweise die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^3 (a_i/a_{i+1}) > \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 a_i \right) \left( \sum_{i=1}^3 1/a_i^2 \right)^{1/2} \quad (a_4 = a_1).$$

J. Brejcha, Brno, ČSSR

**Aufgabe 772.** Sei  $a \geq 1$  ganzzahlig und die Folge  $(R_k)_{k=0,1,\dots}$  rekursiv definiert durch

$$R_0 = 0, \quad R_1 = 1, \quad R_k = a R_{k-1} + R_{k-2} \text{ für } k \geq 2.$$

Man beweise

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{R_{2^i}} = 1 + \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - \frac{1}{2}(a^2 + 4)^{1/2}$$

und damit die Irrationalität dieser Reihe.

P. Bundschuh, Köln, BRD