Das Parallelenaxiom im affinen Raum

Autor(en): **Ruoff, D. / Shilleto, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **31 (1976)**

Heft 1

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-31390

Das Parallelenaxiom im affinen Raum

1. Einleitung

Hilbert stellt in § 2 seiner *Grundlagen der Geometrie* ein Axiomensystem auf, welches die Inzidenzeigenschaften der räumlichen absoluten Geometrie festlegt. Später fügt er, um die dreidimensionale affine Geometrie zu begründen, das Parallelenaxiom hinzu:

P. In einer Ebene seien eine Gerade und ein ausserhalb liegender Punkt gegeben. Dann existiert in dieser Ebene eine und nur eine Gerade, welche zur gegebenen Geraden parallel ist und durch den gegebenen Punkt geht.

Wir wollen die Rückwirkungen von **P** auf die absoluten Inzidenzaxiome mit denen einer Variante vergleichen. Diese lautet:

P'. Es seien eine Gerade und ein ausserhalb liegender Punkt gegeben. Dann existiert eine und nur eine Gerade, welche zur gegebenen Geraden parallel ist und durch den gegebenen Punkt geht.

Offensichtlich stimmt **P'** in der Formulierung genau mit dem üblichen Parallelenaxiom der ebenen affinen Geometrie überein. Man beachte aber, dass zwei Geraden im Raum nur dann als parallel bezeichnet werden, wenn sie unter anderem auch koplanar sind, sodass in **P'** als räumlichem Axiom implizite Ebenen vorkommen.

2. Hilberts Axiome der absoluten Geometrie

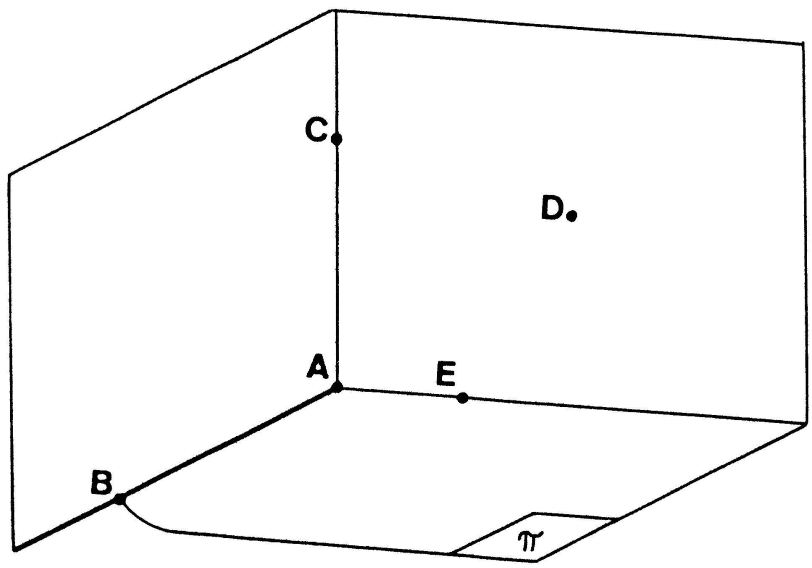
Um Rückverweise zu ermöglichen, sei das erwähnte Axiomensystem von Hilbert in Kürze wiedergegeben. Es basiert auf Punkten, Geraden und Ebenen als Grundobjekten, Punkt-Geraden-Inzidenz und Punkt-Ebenen-Inzidenz als Grundbeziehungen. Eine Gerade ist per definitionem mit einer Ebene inzident, wenn jeder Punkt der Geraden auch in der betreffenden Ebene liegt. [Anm. Wir werden Inzidenzverhältnisse mit mancherlei anschaulichen Wendungen wiedergeben. Ausdrücke wie «Punkte einer Geraden» sollen aber nicht darüber hinwegtäuschen, dass Geraden und Ebenen Grundobjekte und keine Punktmengen sind.]

Grundobjekte und -beziehungen genügen den folgenden Axiomen: (1) Zwei Punkte liegen auf genau einer Geraden, (2) drei nichtkollineare Punkte in genau einer Ebene; (3) auf jeder Geraden gibt es mindestens zwei Punkte, (4) in jeder Ebene mindestens einen Punkt; (5) eine Gerade liegt in einer Ebene, wenn sie mit derselben zwei Punkte gemein hat; (6) zwei verschiedene Ebenen haben entweder keine oder mindestens zwei Punkte gemein; (7) es gibt drei nichtkollineare Punkte und (8) vier nichtkoplanare Punkte.

3. **P′** und Hilberts Axiome

Zunächst erlaubt **P′** die Konstruktion einer Ebene durch eine Gerade und einen ausserhalb liegenden Punkt (s. die Bemerkung am Ende von Abschnitt 1). Damit ersetzt dieses Axiom (zusammen mit (1)) den Existenzteil von (2). – Etwas überraschend ist die Tatsache, dass unter Annahme von **P′** auch das Axiom über die Geraden-Ebenen-Inzidenz, (5), überflüssig wird. Um das zu zeigen betrachte man zuerst eine Gerade und eine durch drei nichtkollineare Punkte gehende Ebene. Gerade und Ebene sind inzident, wenn sie zwei Punkte gemein haben, wie leicht aus **P′** und dem Eindeutigkeitsteil von (2) hervorgeht.

Nun folgt (5) in voller Allgemeinheit, sobald der Satz bewiesen ist: (4′) In jeder Ebene liegen drei nichtkollineare Punkte. Sei also π eine beliebige Ebene. Gemäss (4) und (6) gibt es in ihr zwei Punkte A, B. Diese seien durch C zu einem nichtkollinearen Tripel ergänzt. Man nehme an, C gehöre nicht zu π und finde einen Punkt D ausserhalb der Ebene ABC (Fig. 1).



Figur 1
Dass Gerade AB ganz in π liegt, wird nicht vorausgesetzt.

Nach dem im letzten Absatz Bewiesenen liegt die Gerade AC ganz in ABC. Daraus folgt, dass die Punkte A, C und D eine Ebene bestimmen. Diese hat A und einen weiteren Punkt E mit π gemein. Der aber kann nicht auf AB liegen, da er sonst, wiederum nach dem im letzten Abschnitt Bewiesenen, ABC angehören würde, was die unmögliche Identität von ABC und ACD zur Folge hätte. Folglich ist π mit den drei nichtkollinearen Punkten A, B und E inzident, w.z.b.w.

Soweit haben wir keinen Gebrauch von der Existenz von Punkten auf einer Geraden gemacht. Die Aussage des diesbezüglichen Axioms (3) lässt sich vielmehr aus **P′** und dem Vorausgegangenen herleiten. Man lege eine Ebene durch die betrachtete Gerade und erzeuge auf letzterer zwei Punkte durch Parallelprojektion.
Somit gilt:

Satz 1. Auf folgende Weise wird ein Axiomensystem der räumlichen affinen Geometrie aus Hilberts absolutem Axiomensystem erhalten. Man füge zu diesem **P′** und lasse die nachstehenden Forderungen fallen:

a. Durch drei Punkte gibt es mindestens eine Ebene;

b. Eine Gerade liegt in einer Ebene, wenn sie mit derselben zwei Punkte gemein hat;

c. Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte.

4. **P** und Hilberts Axiome

P und **P**′ sind in Gegenwart aller übrigen Inzidenzaxiome äquivalent. Andrerseits wirkt sich **P** auf dieselben wesentlich schwächer aus als **P**′. So kann **P** den Existenzteil von (2) nicht ersetzen, da er allein das Vorhandensein von Ebenen sichert. Ebenso ist **P** kein Substitut für (5). Der Satz (4′), dass in jeder Ebene drei nichtkollineare Punkte liegen, folgt zwar leicht aus (1)–(8) (s. Fig. 1), hingegen, wie wir gleich beweisen werden, nicht aus (1)–(4), (6)–(8) und **P**. [Anm. Ohne **P** oder (5) verwenden zu müssen, kann man zeigen, dass in jeder Ebene drei (evtl. kollineare) Punkte liegen.]

Um den angekündigten Nachweis zu erbringen, entwickeln wir ein Modell $\mathfrak{B}$ aus einem affinen Raum $\mathfrak{A}$. Wir greifen eine Parallelitätsklasse von (sagen wir, horizontalen) Ebenen in $\mathfrak{A}$ heraus und betrachten diese als Geraden in $\mathfrak{B}$. Die übrigen Geraden von $\mathfrak{B}$ seien die nichthorizontalen Geraden in $\mathfrak{A}$. Punkte und Ebenen seien in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dieselben, ebenso in anschaulicher Weise die Inzidenzbeziehungen. Axiom (5) ist nicht erfüllt in $\mathfrak{B}$, da eine horizontale Gerade mit einer geneigten Ebene mindestens zwei Punkte gemein hat, ohne in ihr zu liegen (Fig. 2). Dafür gilt **P**, im besonderen weil eine horizontale Gerade und ein Punkt ausserhalb niemals einer gemeinsamen Ebene angehören und das Axiom in dieser Situation somit gar nicht zur Anwendung kommt. Alle übrigen Inzidenzaxiome sind im Modell $\mathfrak{B}$ erfüllt, hingegen nicht die Bedingung (4′). Diese scheitert, weil in horizontalen Ebenen alle Punkte kollinear sind.

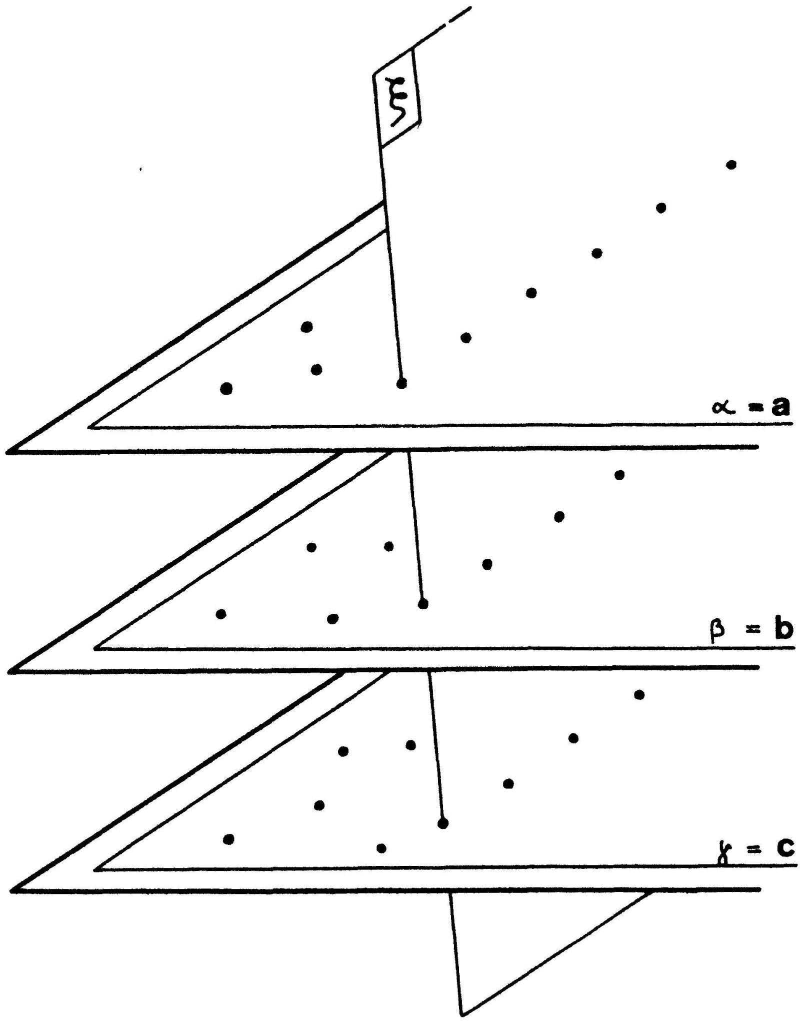
Dass **P** im Gegensatz zu **P**′ (5) nicht ersetzt, kommt selbst im Beisein von (4′) zum Ausdruck. Um dies zu zeigen, konstruieren wir ein neues Modell $\mathfrak{C}$ aus $\mathfrak{B}$, indem wir in letzterem die horizontalen Ebenen streichen. Damit sind die horizontalen Ebenen von $\mathfrak{A}$ nur noch Geraden, aber nicht mehr Ebenen von $\mathfrak{C}$. Man zeigt wie oben, dass (5) nicht erfüllt ist, dass aber **P** und alle übrigen Inzidenzaxiome gelten. Anstelle von (4) kann sogar (4′) verifiziert werden, womit wir den ersten Satz dieses Abschnitts bestätigt haben.

Das einzige Axiom, das durch **P** überflüssig gemacht wird, ist (3). Gäbe es eine Gerade, auf der nur ein Punkt läge, so wäre sie definitionsgemäss mit denselben Ebenen wie dieser inzident, also bestimmt mit einer Ebene, in der drei nichtkollineare Punkte liegen. In einer solchen geht aber jede Gerade durch mindestens zwei Punkte, wie man durch eine Parallelprojektion, d.h. durch Anwendung von **P** zeigt. Gäbe es gar eine Gerade ohne Punkte, so müsste diese gemäss Inzidenzdefinition in jeder Ebene liegen, also auch in einer Ebene mit drei nichtkollinearen Punkten, wo ihre Existenz wiederum mit Hilfe von **P** widerlegt würde.

Wir fassen zusammen:

Satz 2. Gegeben sei das System von Hilberts absoluten Inzidenzaxiomen sowie **P**.

a. Das Axiom der Existenz einer Ebene durch drei nichtkollineare Punkte ist ein notwendiger Bestandteil dieses Systems;



Figur 2
In einer geneigten Ebene ξ liegen nicht alle Punkte irgendeiner der Modellgeraden $a, b, c, \ldots$.

b. Ebenso ist das Axiom, dass eine Gerade in einer Ebene liegt, wenn sie mit derselben zwei Punkte gemein hat, unerlässlich;

c. Hingegen ist das Axiom der Existenz zweier Punkte auf einer gegebenen Geraden überflüssig.

Die Aussagen a. und b. bleiben bestehen, wenn wir annehmen, dass jede Ebene mit drei nichtkollinearen Punkten inzident ist. Dies wiederum ist eine Bedingung, die selbst unter Voraussetzung von **P** nicht ohne Beizug von a. und b. bewiesen werden kann.

D. Ruoff und J. Shilleto, University of Regina, Regina, Canada

LITERATURVERZEICHNIS

[1] F. Bachmann, *Zwei Kapitel elementare Geometrie*, Vorlesungsskriptum, Kiel (1967).
[2] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 10. Aufl., Tübingen (1968).
[3] R. Lingenberg, *Grundlagen der Geometrie 1*, Mannheim, etc. (1969).