Zur Startbewegung der elastisch aufgehängten Kreisscheibe

Autor(en): **Braunbek, Werner**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **30 (1975)**

Heft 6

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-30654

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

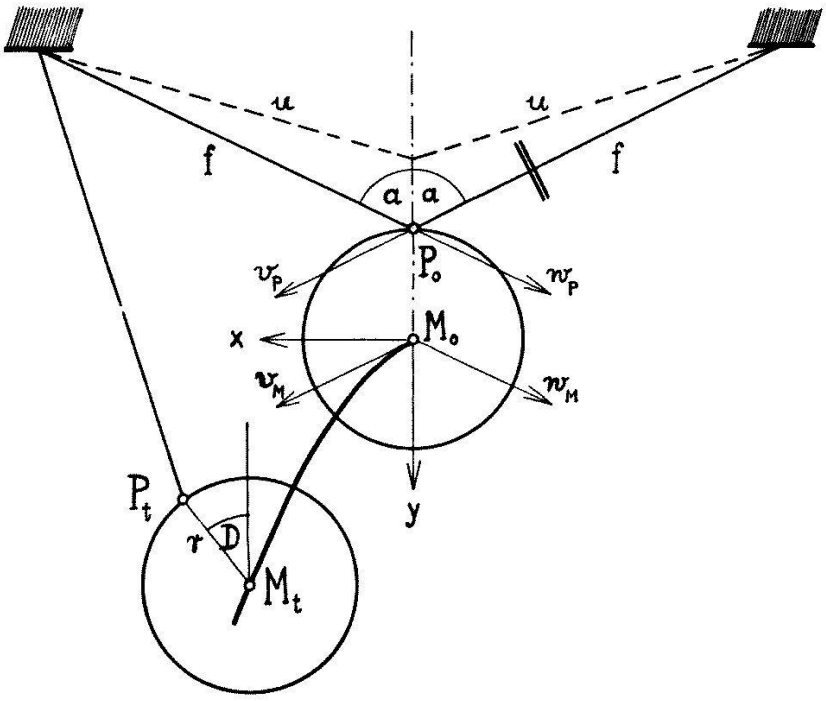
El. Math. | Band 30 | Heft 6 | Seiten 121–144 | 10. November 1975

Zur Startbewegung der elastisch aufgehängten Kreisscheibe

1. Einleitung

Die erstmals von E. T. Whittaker [1] behandelte Aufgabe verlangt die Bestimmung des Anfangskrümmungsradius der Bahnkurve des Mittelpunkts M einer an zwei masselosen, elastischen Saiten symmetrisch aufgehängten Kreisscheibe (Abb.) mit radialsymmetrischer Massenverteilung[1]), wenn zur Zeit $t = 0$ die eine Saite durchschnitten wird. I. Paasche [2] stellte fest, dass später noch eine zweite Behandlung dieser Aufgabe erfolgte [3], die indes zu einem um einen Faktor 2 verschiedenen Ergebnis führte. Er löste dann [2] die Aufgabe selbst nach einem neuen Verfahren und fand ein Resultat, das nochmals einen anderen Faktor, nämlich 3, aufweist.

Im folgenden wird das Problem in wieder anderer Form, nach der Methode der sukzessiven Näherungen, gelöst. Das Ergebnis von I. Paasche [2] wird bestätigt, doch ist der Rechengang physikalisch durchsichtiger und wesentlich kürzer. Die 0. Näherung liefert die Anfangstangente der Bahnkurve, die 1. Näherung die Anfangskrümmung, beide natürlich exakt trotz des Ausdrucks «Näherung»; weiter braucht man bei der vorliegenden Fragestellung nicht zu gehen. Das Verfahren kann



Veranschaulichung des Scheiben-Problems mit den wichtigsten Bezeichnungen.

[1]) Die ursprünglich für eine homogene Kreisscheibe gestellte Aufgabe wird hier gleich auf eine radialsymmetrische verallgemeinert.

an sich im rechtwinkligen KS (x, y) (siehe Fig.) durchgeführt werden, man gelangt aber noch rascher zum Ziel in dem schiefwinkligen KS (v, w), dessen Achsen zu den gespannten Saiten des Ausgangszustandes parallel sind. Zweckmässig führt man für die Punkte M und P zwei getrennte KS mit parallelen Achsen ein (siehe Fig.).

2. Bezeichnungen

Die aus dem Bild ersichtlichen Bezeichnungen werden nicht mehr wiederholt. u ist die Länge der ungespannten Saiten, die die Federkonstante k haben, g Schwerefeldstärke, m Masse der Scheibe, $J = m\varrho^2$ Trägheitsmoment um die Mittelpunktsachse, ϱ Trägheitsradius. Die Kräfte und die Verschiebungen der Punkte M bzw. P der Scheibe in 0. Ordnung werden mit F, v, w, die Zusatzkräfte und Zusatzverschiebungen, die in 1. Ordnung hinzukommen, mit F', v', w' bezeichnet, wobei die Indizes M und P die Zugehörigkeit zu den Punkten angeben. Die Kräfte werden in ihre Komponenten F_v und F_w im KS (v, w) zerlegt. Wegen ihres häufigen Auftretens werden für die folgenden Ausdrücke Abkürzungen eingeführt:

$$\sin\alpha = s,\ \cos\alpha = c,\ \sin 2\alpha = s_2,\ \cos 2\alpha = c_2,\ \sin 4\alpha = s_4\,.$$

3. Durchführung der sukzessiven Näherung

Die Anfangs-Spannung in jeder der beiden Saiten ist $k\,(f - u)$. Das ursprüngliche Gleichgewicht erfordert also:

$$\frac{m\,g}{2\,c} = k\,(f - u)\,, \tag{1}$$

was aber weiterhin nicht mehr gebraucht wird. Da im Gleichgewicht nämlich die Resultierende der 3 Kräfte Null ist, wird, wenn im Augenblick $t = 0$ die Saite rechts durchschnitten wird, die neue Resultierende der 2 verbleibenden Kräfte einfach gleich der wegfallenden Kraft der rechten Saite in entgegengesetzter Richtung. Es wirkt für $t = 0$ daher auf die Scheibe

$$\left.\begin{array}{ll} \text{die Kraft:} & \begin{cases} F_v = k\,(f - u) \\ F_w = 0 \end{cases} \\ \text{das Drehmoment:} & M = r\,s\,F_v \\ & \text{(um } M\text{; Hebelarm } r\,s\text{).} \end{array}\right\} \tag{2}$$

Diese Kräfte werden in 0. Näherung als konstant betrachtet. Sie führen zu Verschiebungen v_M, w_M des Punktes M und zu einer Drehung D, alle proportional t^2. Die hieraus sich ergebenden Verschiebungen v_P, w_P des Punktes P bewirken durch Richtungs- und Längenänderung der linken Saite in 1. Näherung Zusatzkräfte F_v', F_w' ebenfalls proportional t^2. Das ausserdem entstehende Zusatzdrehmoment M' braucht nicht mehr berechnet zu werden, da für das Endresultat nur die Bewegung des Scheibenmittelpunkts interessiert. Aus F_v', F_w' ergeben sich die Zusatzverschiebungen 1. Ordnung v_M', w_M', proportional t^4. Von ihnen braucht man nur w_M', weil v_M' gegen v_M in der Grenze $t \to 0$ verschwindet, während wegen $w_M = 0$ [siehe (3)] das t^4-proportionale w_M' das niedrigste Glied ist.

Aus (2) kommt nach den Grundgesetzen der Dynamik:

$$\left.\begin{aligned} v_M &= \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{m} (f-u)\, t^2 = C_v\, t^2 \\ w_M &= 0 \quad \text{(d.h. Bahntangente in } M_0 \text{ ist die } v_M\text{-Achse)} \\ D &= \frac{1}{2} \cdot \frac{r\,s}{J}\, k\,(f-u)\, t^2 = \frac{m\,r\,s}{J}\, C_v\, t^2 = \frac{r\,s}{\varrho^2}\, C_v\, t^2 . \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Aus v_M und D folgen v_P und w_P, hieraus die Zusatzkraft $F_w' \sim t^2$ (F_v' braucht man nicht), und aus ihr die Zusatzverschiebung

$$w_M' = \frac{1}{m} \iint_{t=0}^{t} F_w'\, dt\, dt = C_w\, t^4 . \tag{4}$$

Die gesamten zu berücksichtigenden Verschiebungen des Scheibenmittelpunktes sind nun v_M nach (3) und, wegen $w_M = 0$, w_M' nach (4). Elimination von t ergibt aus ihnen die Näherungsparabel der Bahnkurve im Ursprung

$$w = \frac{C_w}{C_v^2}\, v^2 \tag{5}$$

mit ihrem Nullpunkts-Krümmungsradius

$$R = \frac{C_v^2}{2\,C_w\,s_2} . \qquad \text{(positiv bei Krümmung wie in der Figur)} \tag{6}$$

Der Faktor s_2 im Nenner rührt vom schiefwinkligen KS her. Die einzige etwas umständlichere Rechnung ist nun nur noch die Ermittlung der Grösse C_w aus (4). Das C_v ist in der ersten der Gleichungen (3) definiert. In der Tatsache, dass w_M Null wird und dass man dadurch sofort die Gleichung (5) der Näherungsparabel erhält, liegt der Vorteil des schiefwinkligen KS.

4. Berechnung von C_w

Die Verschiebung 0. Ordnung des Punktes P setzt sich aus der Verschiebung v_M des Punktes M und einer von der Drehung D herrührenden horizontalen Verschiebung um rD zusammen, deren Komponenten nach v und w $rD/2s$ und $-rD/2s$ sind. Mit v_M und D nach (3) ergibt sich daher die Verschiebung von P zu:

(Abkürzung $\alpha = r^2/2\varrho^2$)

$$\left.\begin{aligned} v_P &= v_M \left(1 + \frac{r^2}{2\varrho^2}\right) = (1+\alpha)\, v_M \\ w_P &= -\frac{r^2}{2\varrho^2}\, v_M = -\alpha\, v_M . \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Bezeichnet Δf die Verlängerung, Δa die Richtungsänderung (Zunahme des Winkels a) der Saite infolge der Verschiebung 0. Ordnung des Punktes P, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \Delta f &= c_2\, v_P + w_P = [c_2 - \alpha\,(1-c_2)]\, v_M = (c_2 - 2\alpha s^2)\, v_M \\ \Delta a &= -\frac{s_2 v_P}{f} = -\frac{s_2\,(1+\alpha)}{f}\, v_M\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die Längenänderung der Saite bewirkt eine reine w-Zusatzkraft der Grösse $-k\Delta f$, die Richtungsänderung dagegen eine Zusatzkraft der Grösse $k(f-u)\Delta a$ senkrecht zur Saite, die man erst in ihre v- und w-Komponenten zerlegen muss. Die gesamte w-Komponente aus beiden Ursachen wird dann:

$$\left.\begin{aligned} F_w' &= -k\Delta f + k(f-u)\,\Delta a\,\mathrm{tg}\,(2a - \pi/2) \\ &= -k\Delta f - k(f-u)\,\frac{c_2}{s_2}\,\Delta a \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und mit (8):

$$\left.\begin{aligned} F_w' &= v_M\, k\left[-c_2 + 2\alpha s^2 + \frac{f-u}{f}\, c_2\,(1+\alpha)\right] \\ &= v_M\, k\left[\alpha - \frac{u}{f}\, c_2\,(1+\alpha)\right] \quad (\text{wegen } c_2 + 2s^2 = 1) \\ &= C_v\, k\left[\alpha - \frac{u}{f}\, c_2\,(1+\alpha)\right] t^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die zweimalige Integration nach t gemäss (4) liefert

$$w_M' = \frac{C_v k}{12m}\left[\alpha - \frac{u}{f}\, c_2\,(1+\alpha)\right] t^4 = C_w\, t^4\,, \tag{11}$$

und nach (6) kommt unter Berücksichtigung von (2) das Endergebnis:

$$\left.\begin{aligned} R &= 3(f-u)\left[\alpha s_2 - \frac{u}{f}\, s_2\, c_2\,(1+\alpha)\right]^{-1} \\ &= 3(f-u)\left[\alpha s_2 - \frac{u}{2f}\, s_4\,(1+\alpha)\right]^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Speziell für die homogene Kreisscheibe folgt mit $\alpha = 1$

$$R_h = 3(f-u)\left[s_2 - \frac{u}{f}\, s_4\right]^{-1} \tag{13}$$

in Übereinstimmung mit dem Resultat von I. Paasche [2].

5. Der Fall des Massenpunkts

Da in (13) überraschenderweise ausser g, m und k (diese stecken implizit in $(f-u)$) auch der Scheibenradius r nicht mehr vorkommt, könnte man denken, (13)

gelte auch für den Fall, dass die Scheibe durch einen Massenpunkt ersetzt wird. Dies ist indes nicht richtig. Der Grenzübergang $r \to 0$ ist nicht erlaubt, weil bei ihm bei D nach (3) (r/ϱ ginge gegen 1) schon in 0. Ordnung ein unendlich grosser Koeffizient von t^2 entstünde. Man kann auch sagen: Der Konvergenzbereich der Methode in t würde für $r \to 0$ auf Null zusammenschrumpfen. Man kann jedoch das Ergebnis für den Massenpunkt durch einen einfachen Kunstgriff erhalten: Man unterbindet die für den Massenpunkt sinnlose Drehung durch ein bei verschwindendem r endlich bleibendes Trägheitsmoment, also durch $\alpha = 0$. Dies in (12) eingesetzt, liefert sofort für den Massenpunkt:

$$R_{M.P.} = -6\frac{f}{s_4 u}(f-u)\,. \tag{14}$$

6. Der Fall der starren Saiten

Sind die Aufhängesaiten nicht dehnbar, so ist $f = u = \text{const}$. Das formale Ergebnis nach (12) oder (13) wäre $R = 0$, was sicher unrichtig ist. Tatsächlich ist auch dieser Grenzübergang nicht erlaubt, da er durch $k \to \infty$ auszudrücken wäre, wobei in (3) wieder schon in 0. Ordnung die Koeffizienten von t^2 unendlich würden. Während eben bei elastischen Saiten beim Zerschneiden der rechten Saite die Spannkraft der linken sich nur allmählich, gemäss ihrer Längenänderung, ändert, wird sie im Fall der starren Saite, die keine Längenänderung zulässt, schlagartig anders, in ihrem Betrag erzwungen durch die Zwangsbedingung $f = \text{const}$. Es gibt hier nicht wie im Fall des Massenpunktes einen Kunstgriff, um doch noch ein richtiges Ergebnis zu gewinnen. Die ganze Rechnung müsste vielmehr von vornherein mit Hilfe der Zwangsbedingung anders geführt werden.

Werner Braunbek, Institut für Theoretische Physik, Universität Tübingen

LITERATURVERZEICHNIS

[1] E. T. Whittaker, *Analytische Dynamik* (Berlin 1924), S. 183.
[2] I. Paasche, *Szabó-Festschrift des Verlags Wilhelm Ernst und Sohn* (Berlin, München, Düsseldorf, 1971).
[3] H. Günzler (München 1956), unveröffentlicht.

The Cubic Revisited

In this note we offer another *method* for solving the general cubic equation. Our method amounts to the technique of completing the cube in a transformed equation by which we arrive at a binomial equation. Our *formula* is of course not new in every way, and naturally it can be reconciled with the celebrated one by Cardan (Tartaglia).

The general cubic equation

$$f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0\,, \quad (a \neq 0)$$