Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **30 (1975)**

Heft 5

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Aufgaben

Aufgabe 725. Ein ebenes Dreieck mit den Winkeln $\alpha < \beta < \gamma$ habe die Höhen h_i, den Umkreisradius R und den Inkreisradius r. Es gelte $\gamma/\alpha = (1/r)\,(h_1 + h_2 + h_3) - (3R/2r + 2r/R) = 5$. Man zeige, dass genau einer der Winkel des Dreiecks mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. F. Leuenberger, Feldmeilen ZH

Lösung: Nach einem Ergebnis von A. Bager (s. El. Math. *12*, p. 65 (1957), Aufgabe 266) ist

$$h_1 + h_2 + h_3 = 2R + 4r + \frac{r^2}{R} + \frac{s^2 - (2R + r)^2}{2R}. \tag{1}$$

Ferner ist nach Voraussetzung

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{3R}{2} + \frac{2r^2}{R} + 5r. \tag{2}$$

Aus (1), (2) folgt nach Vereinfachung $s^2 = 3\,(R + r)^2$ oder

$$\frac{s}{R} = \sqrt{3}\left(1 + \frac{r}{R}\right). \tag{3}$$

Mit

$$\frac{s}{R} = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\alpha + \sin 6\alpha + \sin 5\alpha,$$

$$1 + \frac{r}{R} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \cos\alpha - \cos 6\alpha + \cos 5\alpha$$

sowie $\cos 60° = 1/2$, $\sin 60° = (1/2)\sqrt{3}$ lässt sich (3) unter Benutzung der Additionstheoreme zu

$$\sin(\alpha - 60°) + \sin(120° - 6\alpha) + \sin(5\alpha - 60°) = 0 \tag{4}$$

umformen. Gleichung (4) wiederum erweist sich nach bekannten trigonometrischen Formeln als äquivalent zu

$$\sin(3\alpha - 60°)\sin\frac{60° - \alpha}{2}\sin\frac{5\alpha - 60°}{2} = 0. \tag{5}$$

Wegen $\alpha + \gamma = 6\alpha < 180°$ und $\alpha < \beta < \gamma$ kommt als einzige Lösung von (5) $\alpha = 20°$ in Frage. Für diese ist $\beta = 60°$ und $\gamma = 100°$. Von diesen 3 Winkeln ist nur β mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

(Die Lösung $\alpha = 12°$, $\beta = 108°$, $\gamma = 60°$ scheidet wegen $\beta > \gamma$ aus.)

H. Kappus, Rodersdorf SO

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark) und M. Vowe (Therwil BL).

Anmerkung: Der Aufgabensteller weist darauf hin, dass (3) charakteristisch ist für Dreiecke mit einem Innenwinkel von 60° (vgl. etwa G. R. Veldkamp, El. Math. *19* (1964), p. 88).

Aufgabe 726. Es seien n eine natürliche Zahl und $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ die fortlaufend numerierten Eckpunkte eines regulären $(2n+1)$-Ecks mit Umkreisradius 1. Man zeige, dass für $L_i := \overline{A_1 A_{i+1}}$ $(i = 1, \ldots, n)$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} L_i^2 = \prod_{i=1}^{n} L_i^2 = 2n + 1$.

G. Bercea, München, BRD

Lösung: Die fortlaufend numerierten Eckpunkte $A_1, A_2, \ldots, A_k$ $(k \in N, k \geq 3)$ eines regulären k-Ecks mit Umkreisradius 1 können mit den entsprechend numerierten k-ten Einheitswurzeln $e_o = 1, e_1, \ldots, e_{k-1}$ durch geometrische Interpretation in der Gauss'schen Zahlenebene identifiziert werden. Für $L_i := \overline{A_1 A_{i+1}}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ gilt demnach $L_i = |e_i - e_o| = |e_i - 1|$. (1)

a) Nach (1) ist $L_i^2 = |e_i - 1|^2 = (e_i - 1)(\bar{e}_i - 1) = |e_i|^2 - e_i - \bar{e}_i + 1 = 2 - e_i - \bar{e}_i$, also $\sum_{i=1}^{k-1} L_i^2 = 2(k-1) - \sum_{i=1}^{k-1} e_i - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{e}_i = 2k - \sum_{i=0}^{k-1} e_i - \sum_{i=0}^{k-1} \bar{e}_i$. Da $\sum_{i=0}^{k-1} e_i = 0$ und ebenso $\sum_{i=0}^{k-1} \bar{e}_i = 0$ ist, gilt somit $\sum_{i=1}^{k-1} L_i^2 = 2k$. (2)

Wenn k ungerade ist, dann folgt aus (2) unter Berücksichtigung von $L_i = L_{k-i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ unmittelbar, dass $\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} L_i^2 = (1/2) \sum_{i=1}^{k-1} L_i^2 = k$ ist.

b) Nach (1) ist ferner $\prod_{i=1}^{k-1} L_i^2 = \prod_{i=1}^{k-1} |e_i - 1|^2 = \left| \prod_{i=1}^{k-1} (e_i - 1) \right|^2$. Nun ist bekanntlich $\prod_{i=1}^{k-1} (1 - e_i) = k$. Demnach gilt $\prod_{i=1}^{k-1} L_i^2 = k^2$. (3)

Wenn k ungerade ist, folgt aus (3) wegen $L_i = L_{k-i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$, dass $\prod_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} L_i^2 = \left(\prod_{i=1}^{k-1} L_i^2\right)^{1/2} = k$ ist.

Damit ist alles gezeigt.

Aus (2) und (3) lassen sich auch Aussagen über die Summe bzw. das Produkt der Quadrate der verschieden langen Diagonalen eines regulären k-Ecks mit Umkreisradius 1 gewinnen, wenn k gerade ist: Wegen $L_i = L_{k-i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ und $L_{k/2} = 2$ ergibt sich $\sum_{i=1}^{k/2} L_i^2 = k + 2$ und $\prod_{i=1}^{k/2} L_i^2 = 2k$.

O. Reutter, Ochsenhausen, BRD

Weitere Lösungen sandten G. Bach (Braunschweig, BRD), A. Bager (Hjørring, Dänemark), G. Baron (Wien, Österreich), C. Bindschedler (Küsnacht ZH), J. Binz (Bolligen BE), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), J. Fehér (Pécs, Ungarn), K. Grün (Linz, Österreich), L. Hämmerling (Aachen, BRD), P. Hohler (Olten), H. Kappus (Rodersdorf SO), D. Laugwitz (Darmstadt, BRD), O.P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), Chr. A. Meyer (Bern), P. Nüesch (Lausanne), H.G. Roos (Stassfurt, DDR), R. Shantaram (Flint, Michigan, USA), Hj. Stocker (Wädenswil ZH), M. Vowe (Therwil BL) und R. Wyss (Flumenthal SO).

Anmerkungen: 1) G. Baron zeigt weitergehend die Gültigkeit von $\sum_{i=1}^{n} L_i^{2k} = (1/2)\,\binom{2k}{k}\,(2n+1)$ für $2n+1 > k$ und von $\sum_{i=1}^{n} L_i^{2k} \in \mathbf{N},\ (2n+1) \mid \sum_{i=1}^{n} L_i^{2k}$ für alle $k \in \mathbf{N}$.

2) D. Laugwitz weist darauf hin, dass Summe und Produkt aller L_i^2 für jedes k mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Dasselbe gilt auch für das Produkt der L_i selbst, welches nach (3) gleich k ist. Dagegen gilt für $s_k = \sum_{i=1}^{k-1} L_i$ folgender Sachverhalt: s_k ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn dies für die Seite L_1 zutrifft; es besteht nämlich die Beziehung $s_k = L_1/(1 - \sqrt{1 - (L_1/2)^2})$.

3) D. Laugwitz stellt auch einen Zusammenhang mit Problem E 2442 (Amer. Math. Monthly *81* (1974) 1031) her, aus dem $\sum_{i=1}^{k-1} L_i^{-2} = (k^2 - 1)/24$ gefolgert werden kann.

4) P. Hohler macht darauf aufmerksam, dass die Behauptungen der Aufgabe Spezialfälle der Probleme 234a und 236c in Shklarsky-Chentzov-Yaglom, The USSR Olympiad Problem Book (Freeman, London–San Francisco 1962) sind.

5) Hj. Stocker erwähnt einen Zusammenhang mit Aufgabe 124 (El. Math. *6* (1951) 64).

Aufgabe 727. Give an elementary proof (no calculus) of

$$\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}^{\sqrt{n}} \tag{1}$$

where n is an integer ≥ 7. M.S. Klamkin, Ann Arbor, Michigan, USA

Lösung: Die behauptete Ungleichung (1) ist gleichwertig mit

$$n^{1/(1+\sqrt{1+1/n})} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{2}$$

(2) gilt sicher dann, wenn

$$n^{1/(1+\sqrt{1+1/n})} > e. \tag{3}$$

(3) ist aber gleichwertig mit

$$\ln n > 1 + \sqrt{1 + 1/n}. \tag{4}$$

Die linke Seite von (4) ist eine monoton wachsende Funktion in n, die rechte Seite monoton fallend in n. Durch Nachrechnen bestätigt man die Gültigkeit von (4) für $n = 8$. Somit gilt (4), daher auch (1), für $n \geq 8$. Schliesslich gilt (1) auch für $n = 7$.
E. Braune, Linz, Österreich

Weitere Lösungen sandten G. Baron (Wien, Österreich), G. Bercea (München, BRD; 2 Lösungen), E. Braune (Linz, Österreich; 2. Lösung), P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Hämmerling (Aachen, BRD), H. Harborth (Braunschweig, BRD), H.

Kappus (Rodersdorf SO), O.P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), Chr.A. Meyer (Bern), O. Reutter (Ochsenhausen, BRD), H.G. Roos (Stassfurt, DDR), R. Shantaram (Flint, Michigan, USA), Hj. Stocker (Wädenswil ZH) und M. Vowe (Therwil BL).

Anmerkungen: G. Baron und G. Bercea weisen darauf hin, dass es zu jeder natürlichen Zahl k ein $n_o(k)$ so gibt, dass aus $n > n_o(k)$ folgt

$$\sqrt[k]{n^{\sqrt[k]{n+1}}} > \sqrt[k]{(n+1)^{\sqrt[k]{n}}} .$$

O. Reutter zeigt die Gültigkeit der folgenden Aussage: Sind n und ε reelle Zahlen mit $n \geq e^2$ und $\varepsilon > 0$, dann gilt

$$\sqrt[\sqrt{n+\varepsilon}]{n} > \sqrt[\sqrt{n}]{n+\varepsilon} .$$

Aufgabe 728. Eine assoziative algebraische Struktur $(H, \cdot)$ mit dem neutralen Element e nennen wir ein r-Monoid, falls H mindestens ein Element enthält, welches in H ein rechtsinverses, aber kein linksinverses Element besitzt. Man finde ein r-Monoid H_o derart, dass jedes r-Monoid ein zu H_o isomorphes Untermonoid besitzt.

A. Zbinden, Bern

Lösung: Es sei H_o das von der zweielementigen Menge $\{a_o, b_o\}$ erzeugte Monoid mit dem neutralen Element e_o und mit der Relation $a_o b_o = e_o$, $b_o a_o \neq e_o$. Dann besteht H_o aus den paarweise verschiedenen Elementen $b_o^m a_o^n$ $(m, n \geq 0)$, und H_o ist ein r-Monoid. Ferner gilt $b_o^{m_1} a_o^{n_1} = b_o^{m_2} a_o^{n_2} \longrightarrow m_1 = m_2, n_1 = n_2$. (*)

Es sei nun H ein beliebiges r-Monoid. Es existiert ein $a \in H$ mit den Eigenschaften:

Es gibt ein $b \in H$ mit $ab = e$. (1)

Für alle $x \in H$ gilt $xa \neq e$. (2)

Aufgrund von (*) ist die Abbildung $f: H_o \to H$ gemäss $f(b_o^m a_o^n) = b^m a^n$ wohldefiniert.

f ist ein Homomorphismus. Denn im Falle $n_1 \geq m_2$ gilt

$$f(b_o^{m_1} a_o^{n_1} \cdot b_o^{m_2} a_o^{n_2}) = f(b_o^{m_1} a_o^{n_1 - m_2 + n_2}) = b^{m_1} a^{n_1 - m_2 + n_2}$$
$$= b^{m_1} a^{n_1} \cdot b^{m_2} a^{n_2} = f(b_o^{m_1} a_o^{n_1}) f(b_o^{m_2} a_o^{n_2}) ,$$

und der Fall $n_1 < m_2$ erledigt sich analog.

f ist injektiv. Es sei $b^{m_1} a^{n_1} = b^{m_2} a^{n_2}$. Wäre etwa $n_1 < n_2$, so ergäbe sich mit (1)

$$e = a^{m_1} (b^{m_1} a^{n_1}) b^{n_1} = a^{m_1} b^{m_2} a^{n_2} b^{n_1} = (a^{m_1} b^{m_2} a^{n_2 - n_1 - 1}) a ,$$

im Widerspruch zu (2). Also gilt $n_1 = n_2$, d.h. $b^{m_1} = b^{m_2}$.

Wäre etwa $m_1 < m_2$, so ergäbe sich mit (1)

$$e = a^{m_2} b^{m_2} = a^{m_2} b^{m_1} = a^{m_2 - m_1} (a^{m_1} b^{m_1}) = a^{m_2 - m_1 - 1} a ,$$

im Widerspruch zu (2). Also gilt auch $m_1 = m_2$ ind somit insgesamt $b_o^{m_1} a_o^{n_1} = b_o^{m_2} a_o^{n_2}$.

Damit ist gezeigt, dass $f(H_o)$ ein zu H_o isomorphes Untermonoid von H ist.

J. Spilker, Freiburg i.Br., BRD

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis **10. April 1976.** Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, p. 67), Problem 625 B (Band 25, p. 68), Problem 645 A (Band 26, p. 46), Problem 672 A (Band 27, p. 68), Aufgabe 680 (Band 27, p. 116), Problem 724 A (Band 30, p. 91).

Aufgabe 749. Für ein ebenes Dreieck bezeichnen r den Inkreisradius, F den Mittelpunkt des Feuerbach-Kreises, G den Schwerpunkt, H den Höhenschnittpunkt und I den Inkreismittelpunkt. Man beweise $\overline{IF} : \overline{IG} \cdot \overline{IH} \leq 3 : 4r$ mit Gleichheit genau für gleichschenklige Dreiecke.

I. Paasche, München, BRD

Aufgabe 750. Sechs verschiedene Punkte (Knoten) der euklidischen Ebene werden paarweise durch einfache, sich nicht selbst überschneidende Kurvenbögen (Kanten) derart verbunden, dass je zwei Kanten höchstens einen Punkt (Schnittpunkt oder Knoten) gemeinsam haben. Wie gross ist die Maximalzahl von Schnittpunkten, in denen sich mehr als zwei Kanten schneiden?

H. Harborth, Braunschweig, BRD

Aufgabe 751. Für jede natürliche Zahl n bestimme man alle Folgen $a_1, \ldots, a_n$ nichtnegativer ganzer Zahlen mit der Eigenschaft, dass für $k = 1, \ldots, n$ das Folgenglied a_k die Anzahl der Elemente der Menge $\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid a_i = k - 1\}$ ist.

P. Hohler, Olten

Aufgabe 752. Die reellwertige Funktion f sei auf der ganzen reellen Zahlengeraden definiert und differenzierbar, und die Ableitung f' von f sei bei 0 unstetig. Was lässt sich über Existenz und Endlichkeit der beiden einseitigen Grenzwerte von f' bei 0 sagen?

R. Rose, Biel

Literaturüberschau

Topics in Analytic Number Theory. By H. RADEMACHER. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 169. 320 Seiten mit 4 Figuren. DM 88,–. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1973.

Rademacher gehört zum Kreis jener namhaften deutschen Mathematiker, die in den dreissiger Jahren infolge der politischen Verhältnisse in die Vereinigten Staaten emigriert sind. Er konnte dort als Professor an der University of Pensylvania eine erfolgreich begonnene mathematische Karriere fortsetzen. In den letzten Jahren seines Lebens befasste er sich zur Hauptsache mit Forschungsaufgaben an der Rockefeller-University in New York.

Rademacher hat mit seinen originellen Vorlesungen über analytische Zahlentheorie schon sehr früh das Interesse der Fachwelt auf sich gezogen. Vorerst waren diese *Lectures on analytic Number Theory* durch vervielfältigte Ausarbeitungen bekannt geworden. Vor allem hat eine Autographie des *Tata Institute of Fondamental Research in Bombay* sehr zur Verbreitung von Rademachers Vorlesungen beigetragen.

Rademacher hatte sich offenbar selbst mit dem Gedanken befasst, seine Vorlesungen über analytische Zahlentheorie in Buchform herauszugeben. Bei seinem Tode im Jahre 1969 lag ein vollständiges Manuskript vor, das nun von seinen Schülern E. Grosswald, J. Lehner und M. Newman für den Druck bereitgemacht worden ist. Sie haben daran substantiell nur sehr wenig ge-