Die Vierfach-Spiegelungen an Geraden

Autor(en): **Botsch, Otto**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **30 (1975)**

Heft 5

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-30653

Der gesuchte Winkel $\alpha = \sphericalangle TAS$ ergibt sich dann aus $\operatorname{tg}\alpha = \overline{ST}/\overline{AS} = y_2 z_1/x_1$, also mit Rücksicht auf (6) aus

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b}. \tag{15}$$

Unter Hinzunahme der analogen Formel $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{th} b/\operatorname{sh} a$ können dann alle übrigen Relationen im rechtwinkligen Dreieck ABC gefolgert werden. Sie lassen sich bekanntlich in einer modifizierten «Neperschen Regel» zusammenfassen [3].

W. Wunderlich, Technische Hochschule Wien

LITERATURVERZEICHNIS

[1] R. BALDUS-F. LÖBELL: *Nichteuklidische Geometrie* (Sammlg. Göschen, Bd. 970/970a). 4. Aufl. (Berlin 1964).

[2] F. KLEIN-H. ROSEMANN: *Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie* (Grundlehren d. math. Wiss., Bd. 28). (Berlin), 3. Aufl. 1928, Nachdruck 1968.

[3] H. MESCHKOWSKI: *Nichteuklidische Geometrie.* 4. Aufl. (Braunschweig 1971). – Siehe auch: *Die Ableitung der trigonometrischen Formeln im Poincaréschen Modell der hyperbolischen Geometrie.* El. Math. 7, 130–132 (1952).

[4] H. ZEITLER: *Hyperbolische Geometrie* (Beiträge f. d. math. Unterr., Bd. 3). (München 1970).

Die Vierfach-Spiegelungen an Geraden

Das Produkt von vier Spiegelungen an Geraden der Ebene ergibt bekanntlich entweder eine Translation τ oder eine Rotation ϱ (vgl. [1] S. 41). Anstelle der üblichen, stark aufgesplitterten Fall-Untersuchung zum Nachweis vorstehender Behauptung werden wir im Folgenden eine allgemeine Beweisführung bringen.

Es werde vorausgeschickt, dass der gerichtete Winkel $\omega(\overrightarrow{a,b})$ zwischen zwei Geraden a, b modulo 180° zu verstehen ist und dass Vertauschung der Geraden Umkehr des Vorzeichens bedingt:

$$\omega(\overrightarrow{a,b}) = -\omega(\overrightarrow{b,a}). \tag{1}$$

Einander schneidende Geraden bilden von Null verschiedene Winkel. Will man daher von einem *Winkel zwischen zwei Parallelen* sprechen, so hat man diesem die Grösse 0° mod 180° beizulegen. In Ergänzung von (9) [1] gelten daher die Äquivalenzen:

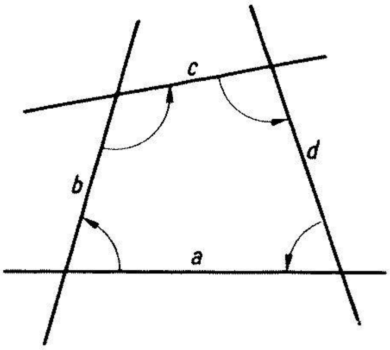
$$a \| b \iff \sigma_a \cdot \sigma_b = \tau \iff \omega(\overrightarrow{a,b}) = 0° \bmod 180° \tag{2}$$

Für vier Geraden a, b, c, d eines Büschels gilt:

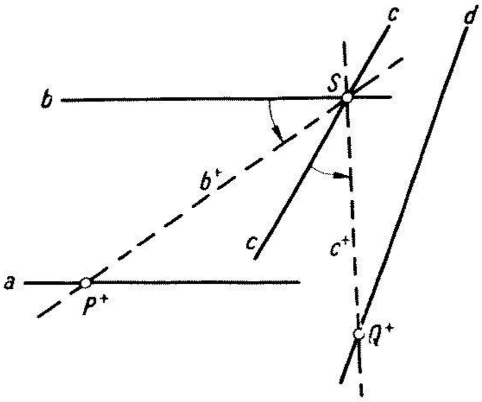
$$\omega(\overrightarrow{a,b}) + \omega(\overrightarrow{b,c}) + \omega(\overrightarrow{c,d}) + \omega(\overrightarrow{d,a}) = 0° \bmod 180°. \tag{3}$$

Verschiebt man eine oder einige der Geraden parallel zu sich, so entsteht ein Vierseit, für dessen Winkel (wegen der Winkelsätze für Parallelen) ebenfalls Gleichung (3) gilt (Fig. 1).

Unser Beweisgang schliesst unmittelbar an Fig. 2 von [1] an. Ist kein Schnittpunkt P von a, b vorhanden, wohl aber ein Schnittpunkt S von b, c, so kann man in weitem Belieben zwei neue Geraden b^+, c^+ des Büschels S derart wählen, dass sie a bzw. d in Punkten P^+ bzw. Q^+ schneiden, während ihr Winkel erhalten bleibt, d.h. $\omega(\overrightarrow{b^+, c^+}) = \omega(\overrightarrow{b, c})$. (Fig. 2)



Figur 1



Figur 2

Für die neue Konfiguration a, b^+, c^+, d gilt nach (14), (15) [1]:

$$\beta = \sigma_a \cdot \sigma_{b^+} \cdot \sigma_{c^+} \cdot \sigma_d = \sigma_{a'} \cdot \sigma_{d'} \tag{4}$$

und wegen $\sigma_{b^+} \cdot \sigma_{c^+} = \sigma_b \cdot \sigma_c$:

$$\beta = \sigma_a \cdot \sigma_{b^+} \cdot \sigma_{c^+} \cdot \sigma_d = \sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \sigma_c \cdot \sigma_d = \sigma_{a'} \cdot \sigma_{d'} \,. \tag{4'}$$

Nennt man die Ersatz-Achsen a', d' neutraler j, k, so gilt daher:

$$\beta = \sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \sigma_c \cdot \sigma_d = \sigma_j \cdot \sigma_k \quad \text{mit:} \quad \omega(\overrightarrow{j, k}) = \omega(\overrightarrow{a, b}) + \omega(\overrightarrow{c, d}) \,. \tag{5}$$

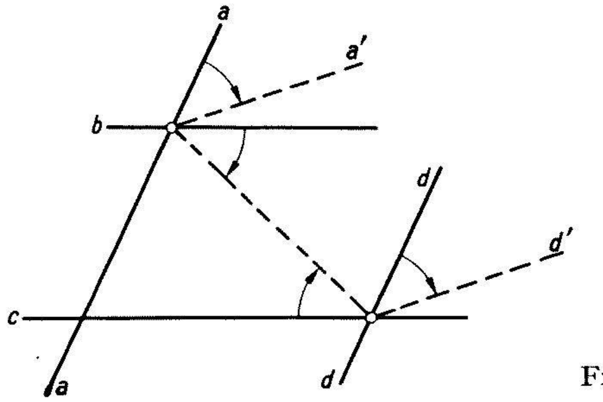
Die Gleichung (5) gilt nicht nur für den in [1] betrachteten Sonderfall, dass ein Schnittpunkt P von a, b vorhanden ist. Der Beweisgang kann durch Einschalten von Hilfsgeraden sinngemäss in allen Fällen durchgeführt werden, wenn wenigstens *ein* Schnittpunkt benachbarter Geradenpaare (a, b), (b, c) oder (c, d) vorhanden ist.

Dagegen versagt der Beweis, falls alle vier Geraden zueinander parallel sind: $a \| b \| c \| d$. Dann gibt es aber nach [1], (13) eine Achse $x \| d$ mit $\sigma_a \cdot \sigma_b = \sigma_x \cdot \sigma_c$ oder: $\sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \sigma_c = \sigma_x$ daher: $\sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \sigma_c \cdot \sigma_d = \sigma_x \cdot \sigma_d = \tau$ und wegen $\omega(\overrightarrow{a, b}) = \omega(\overrightarrow{c, d}) = \omega(\overrightarrow{x, d}) = 0° \bmod 180°$ ebenfalls Gültigkeit der Gleichung (5).

Die Frage, in welchen Fällen eine Vierfach-Spiegelung keine Rotation, sondern eine Translation darstellt, wird nach Gleichung (5) sehr einfach beantwortet:

a) Sind die beiden ersten und die beiden letzten Geraden parallel d.h. $\omega(\overrightarrow{a, b}) = \omega(\overrightarrow{c, d}) = 0° \bmod 180°$ so folgt dies nach (5) auch für $\omega(\overrightarrow{j, k})$. Es handelt sich um den bekannten Fall der Komposition zweier Translationen.

b) Sind die beiden äusseren und die beiden inneren Geraden parallel, so folgt aus $\omega(\overrightarrow{b,c}) = \omega(\overrightarrow{d,a}) = 0° \bmod 180°$ nach (3): $\omega(\overrightarrow{a,b}) + \omega(\overrightarrow{c,d}) = 0° \bmod 180°$ (Fig. 3).



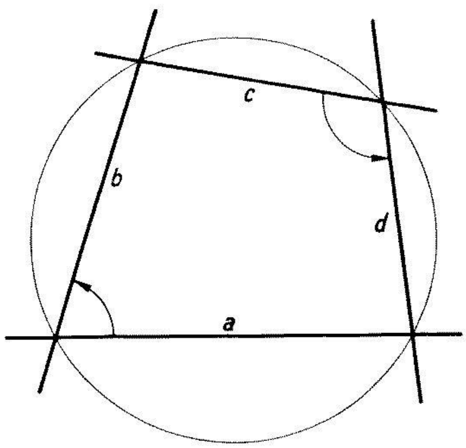
Figur 3

Dabei ist $\beta = \sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \sigma_c \cdot \sigma_d$ nichts anderes als die an a gespiegelte, durch a) erwiesene Translation $\tau = \sigma_b \cdot \sigma_c \cdot \sigma_d \cdot \sigma_a$, nämlich $\beta = \sigma_a \cdot \tau \cdot \sigma_a$.

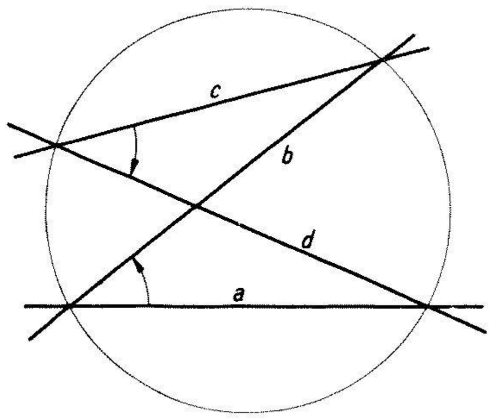
c) Sind die Summen der Winkel zwischen den beiden ersten und den beiden letzten Geraden 0° mod 180°, so folgt dies nach (3) nicht nur auch für die Summen der Winkel zwischen den äusseren und den inneren Geraden, sondern unmittelbar für

$$\omega(\overrightarrow{j,k}) = \omega(\overrightarrow{a,b}) + \omega(\overrightarrow{c,d}) = \omega(\overrightarrow{b,c}) + \omega(\overrightarrow{d,a}) = 0° \bmod 180° .$$

Als Sonderfall von c) ergibt sich die bekannte Komposition von zwei Punktspiegelungen mit $\omega(\overrightarrow{a,b}) = \omega(\overrightarrow{c,d}) = 90° \bmod 180°$. Allgemein enthält c) den unseres Wissens noch unbekannten



Figur 4



Figur 5

Satz: *Bilden die vier Achsen von Spiegelungen ein Sehnen-Viereck, so ist das Vierfach-Produkt der Spiegelungen eine Translation.*

Otto Botsch, Heidelberg

LITERATURVERZEICHNIS

[1] O. Botsch, *Ein reduziertes Erzeugenden-System der Kongruenzgruppe in der Ebene*, El. Math. *29*, 39 (1974).