Über die Flächeninhalte ebener Schnitte konvexer Körper

Autor(en): **Hadwiger, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **30 (1975)**

Heft 5

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-30651

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Band 30 Heft 5 Seiten 97–120 10. September 1975

Über die Flächeninhalte ebener Schnitte konvexer Körper

1. Zunächst soll das Hauptergebnis der vorliegenden Note erläutert werden. Mit R bezeichnen wir den dreidimensionalen euklidischen Raum, und $A \subset R$ sei ein eigentlicher Eikörper, also eine kompakte konvexe Punktmenge A mit inneren Punkten.

Mit den Anschriften $V = V(A) > 0$ und $F = F(A) > 0$ seien Volumen und Oberfläche von A angezeigt. Sei $o \in R$ ein fester Ursprung. Einen Punkt $x \in R$ bezeichnen wir in gleicher Weise wie den in o angreifenden Ortsvektor. Ein Einheitsvektor $u \in R$ kennzeichnet eine Richtung u im Raum. Für ein reelles t ist mit

$$E_{u,t} := \{x \in R;\quad \langle x, u\rangle = t\} \tag{1.1}$$

eine auf u orthogonal stehende Ebene gegeben, wo die Winkelklammer die Bildung des Skalarprodukts vorschreibt.

Für einen ebenen Eibereich $C \subset E$ bedeute $f = f(C) \geq 0$ den Flächeninhalt; hierbei wird wie üblich $f(\phi) = 0$ gesetzt. Mit dem Ansatz

$$f_u = f_u(A) := \sup\{f(A \cap E_{u,t});\quad -\infty < t < \infty\} \tag{1.2}$$

wird der maximale Flächeninhalt angezeigt, der durch die auf der fest gewählten Richtung u orthogonal stehenden Ebenen $E_{u,t}$ aus dem Eikörper A ausgeschnitten werden kann.

Es bedeute weiter ψ, $0 \leq \psi < \pi/2$, den durch das isoperimetrische Quotientendefizit $0 < 36\pi V^2/F^3 \leq 1$ durch Ansatz

$$\cos\psi = \sqrt{\frac{36\,\pi\, V^2}{F^3}} \tag{1.3}$$

bestimmten Hilfswinkel. Dieser erreicht seinen Kleinstwert $\psi = 0$ genau dann, wenn A eine Kugel ist.

In der vorliegenden Studie weisen wir das Bestehen der folgenden für die maximalen Schnittflächeninhalte 1.2 gültigen Ungleichung nach: Für alle Richtungen u gilt

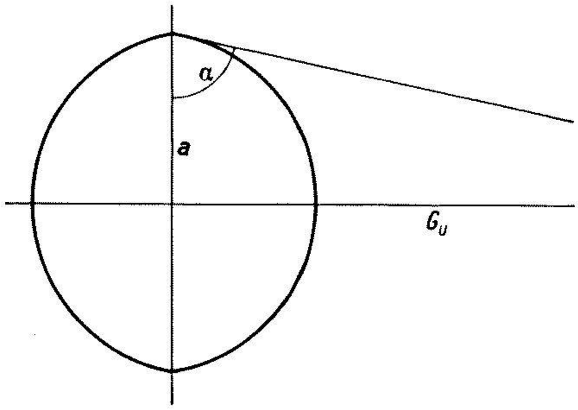
$$\cos^2\left(\frac{\pi+\psi}{3}\right) \leq \frac{f_u}{F} \leq \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi-2\psi}{3}\right), \tag{1.4}$$

wo ψ der mit 1.3 festgelegte Winkel ist. Das Gleichheitszeichen gilt auf der rechten Seite für die symmetrische Kugellinse, auf der linken Seite für den Kugelzylinder.

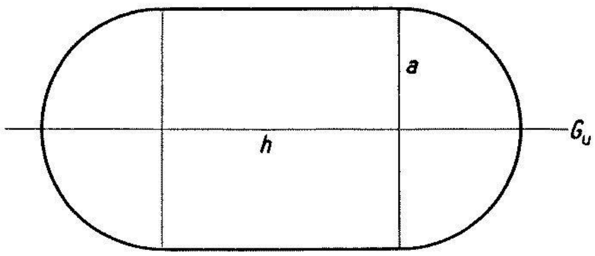
Die mit 1.4 ausgedrückten Extremaleigenschaften der beiden genannten elementaren Rotationseikörper können wie folgt formuliert werden:

Unter allen Eikörpern mit vorgeschriebenen positiven Volum- und Oberflächenmasszahlen nimmt der maximale Flächeninhalt, der sich bei den Schnitten des Eikörpers mit den Ebenen einer parallelen Schar frei wählbarer Richtung ergibt, den grösstmöglichen Wert bei der symmetrischen Kugellinse, den kleinstmöglichen Wert beim Kugelzylinder an, wobei die Richtung der extremalen Schnitte diejenige der Rotationsachse ist.

Die beiden Extremalkörper sind in Figur 1 und 2 durch ihre Meridiankurvenbilder dargestellt.



Figur 1



Figur 2

Man beachte, dass diese im Grenzfall $\psi = 0$ der Kugel identisch werden.

Der mit Ungleichung (1.4) gegebene Satz wird in den nachfolgenden vier Abschnitten bewiesen.

2. Hier geben wir eine Herleitung einer ersten Teilungleichung. Vorerst begründen wir die Schlüsselbeziehung

$$(F + 4 f_u)^2 (F - 2 f_u) \geq 72 \pi V^2 . \tag{2.1}$$

Wir denken uns die Schwarzsche Abrundung des Eikörpers (vgl. [1], S. 87) bezüglich der Geraden G_u durch o der Richtung u vollzogen. Das Volumen V und die Schnittflächeninhalte $f(A \cap E_{u,t})$, also auch f_u bleiben dabei unverändert. Da die Oberfläche F nicht vergrössert wird, genügt es offenbar, (2.1) für eigentliche Rotationskörper mit Achse G_u nachzuweisen. Man beachte hierbei noch, dass $2 f_u < F$ gilt. Sei also A ein solcher Körper mit dem Äquatorradius $a > 0$, so gilt (vgl. [2], S. 175, I_a, I_b)

$$(F + 4\pi a^2)^2 (F - 2 \pi a^2) \geq 72 \pi V^2 \; (2\pi a^2 < F \leq 4\pi a^2) \tag{2.2}$$

$$2\pi a^2 (3 F - 4\pi a^2)^2 \geq 72 \pi V^2 \; (4\pi a^2 \leq F < \infty) . \tag{2.3}$$

Beachtet man die Identität

$$(F + 4\pi a^2)^2 (F - 2\pi a^2) = 2\pi a^2 (3 F - 4\pi a^2)^2 + (F - 4\pi a^2)^3$$

im Falle $F - 4\pi a^2 \geq 0$, so ergeben (2.2) und (2.3) zusammen

$$(F + 4\pi a^2)^2 (F - 2\pi a^2) \geq 72\,\pi\, V^2 \quad (2\pi a^2 < F < \infty)\,, \tag{2.4}$$

also wegen $\pi a^2 = f_u$ die nachzuweisende Ungleichung (2.1.) Wir bringen diese Beziehung auf die Form

$$F^3 + 6 f_u F^2 - 32 f_u^3 \geq 72\,\pi\, V^2\,. \tag{2.5}$$

Setzen wir $z = 2 f_u$, so ergibt sich die in z kubische Beziehung

$$z^3 + 3pz + 2q \leq 0\,, \tag{2.6}$$

wobei $p = -F^2/4$ und $q = -(F^3 - 72\,\pi\, V^2)/8$ gesetzt worden ist. Es wird

$$p^3 + q^2 = -\frac{9\pi}{4} V^2 (F^3 - 36\,\pi\, V^2)\,, \tag{2.7}$$

so dass im Hinblick auf die isoperimetrische Ungleichung

$$p^3 + q^2 \leq 0 \tag{2.8}$$

ausfällt. Zur Bestimmung der reellen Nullstellen der kubischen Funktion

$$H(z) = z^3 + 3pz + 2q \tag{2.9}$$

liegt demnach der «casus irreducibilis» vor.

Sei also $0 < \varphi \leq \pi$ und

$$\cos\varphi = -\frac{q}{\sqrt{-p^3}} = 1 - \frac{72\,\pi\, V^2}{F^3}\,, \tag{2.10}$$

so sind die drei reellen Nullstellen von $H(z)$ durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= 2\sqrt{-p}\,\cos\frac{\varphi}{3} \\ z_2 &= -2\sqrt{-p}\,\cos\left(\frac{\pi+\varphi}{3}\right) \\ z_3 &= -2\sqrt{-p}\,\cos\left(\frac{\pi-\varphi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

gegeben. Mit elementarer Diskussion erzielt man die Aussagen

1. Fall: $0 < \varphi \leq \pi/2 \Rightarrow z_3 \leq z_2 \leq 0 < z_1$

2. Fall: $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi \Rightarrow z_3 < 0 \leq z_2 \leq z_1$.

Nach (2.6) muss $H(z) \leq 0$ sein, und da $z > 0$ ist, resultiert $z_2 \leq z \leq z_1$ oder

$$-F\cos\left(\frac{\pi+\varphi}{3}\right) \leq 2 f_u \leq F\cos\frac{\varphi}{3}\,. \tag{2.12}$$

Mit dem durch 1.3 eingeführten Hilfswinkel ψ ist

$$\cos\varphi = 1 - 2\cos^2\psi \quad \text{oder} \quad \varphi = \pi - 2\psi\,.$$

So ergibt sich statt 2.12 auch

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi + 2\psi}{3}\right) \leq \frac{f_u}{F} \leq \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi - 2\psi}{3}\right). \tag{2.13}$$

Dies ist die in Aussicht gestellte erste Teilungleichung.

3. In ähnlicher Weise begründen wir eine zweite Teilungleichung. Als Ausgangsbeziehung dient hier

$$f_u(3F - 4f_u)^2 \geq 36\pi V^2\,. \tag{3.1}$$

Gleiche Argumentationen wie beim Nachweis von 2.1 ergeben auch im vorliegenden Fall, dass es genügt, 3.1 für eigentliche Rotationseikörper A mit Achse G_u und Äquatorradius $a > 0$ nachzuweisen. Wir stützen uns auf die Ungleichung (vgl. [2], S. 175, I)

$$a(3F - 4\pi a^2) \geq 6V \quad (2\pi a^2 < F < \infty) \tag{3.2}$$

aus der mit $\pi a^2 = f_u$ unmittelbar (3.1) ablesbar wird. Sei jetzt $w = \sqrt{2 f_u}$, so lässt sich 3.1 in die in w kubische Beziehung

$$w^3 + 3pw + 2q \leq 0 \tag{3.3}$$

umschreiben, wobei hier

$p = -F/2$, $q = \sqrt{9\pi/2}\, V$ ist.

In diesem Fall ist nun

$$p^3 + q^2 = -\frac{1}{8}(F^3 - 36\pi V^2)\,, \tag{3.4}$$

so dass auch hier

$$p^3 + q^2 \leq 0 \tag{3.5}$$

wird. Erneut gilt unser Interesse den drei reellen Nullstellen der kubischen Funktion

$$G(w) = w^3 + 3pw + 2q\,, \tag{3.6}$$

die vermöge des Hilfswinkels $\pi/2 < \varphi \leq \pi$,

$$\cos\varphi = -\frac{q}{\sqrt{-p^3}} = -\sqrt{\frac{36\pi V^2}{F^3}} \tag{3.7}$$

durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= 2\sqrt{-p}\cos\frac{\varphi}{3} \\ w_2 &= -2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\pi + \varphi}{3}\right) \\ w_3 &= -2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\pi - \varphi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

dargestellt sind. Einfache Diskussion ergibt

$$w_3 \leq 0 \leq w_2 \leq w_1 .$$

Nach (3.3) muss $G(w) \leq 0$ ausfallen, und da $w > 0$ ist, ergibt sich $w_2 \leq w \leq w_1$ oder

$$-\sqrt{2F} \cos\left(\frac{\pi+\varphi}{3}\right) \leq \sqrt{2f_u} \leq \sqrt{2F} \cos\frac{\varphi}{3} . \tag{3.9}$$

Bedeutet ψ wieder den mit (1.3) eingeführten isoperimetrischen Winkel, so ist $\varphi = \pi - \psi$. Statt (3.9) ergibt sich

$$\cos^2\left(\frac{\pi+\psi}{3}\right) \leq \frac{f_u}{F} \leq \cos^2\left(\frac{\pi-\psi}{3}\right) . \tag{3.10}$$

Dies ist die zweite Teilungleichung.

4. Durch Konfrontation der beiden Teilungleichungen (2.13) und (3.10) ergibt sich unsere Hauptungleichung (1.4).

In der Tat gelten für $0 \leq \psi < \pi/2$ die beiden Beziehungen

$$\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi-2\psi}{3}\right) \leq \cos^2\left(\frac{\pi-\psi}{3}\right) \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi+2\psi}{3}\right) \leq \cos^2\left(\frac{\pi+\psi}{3}\right) . \tag{4.2}$$

Es braucht lediglich bestätigt zu werden, dass die Funktion

$$f(\xi) = \cos^2\left(\frac{\pi+\xi}{3}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi+2\xi}{3}\right)$$

überall nicht negativ ist. Dies ist aber mit der Umrechnung $f(\xi) = \sin^2 \xi/3$ trivial. – Werden jetzt (4.1) und (4.2) zu sinngemässer Verschärfung von (2.13) und (3.10) herangezogen, so ergibt sich die zu beweisende Hauptungleichung (1.4).

5. Schliesslich verifizieren wir noch die im Anschluss an (1.4) angefügten Behauptungen bezüglich der Gültigkeit des Gleichheitszeichens.

a) A sei eine symmetrische Kugellinse mit Äquatorradius a und halbem Scheitelwinkel α, $0 < \alpha \leq \pi/2$ (vgl. Abb. 1). Die für uns wichtigen Werte sind

$$V = \frac{2\pi a^3}{3} \frac{(2+\cos\alpha)\sin\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2}$$

$$F = \frac{4\pi a^2}{1+\cos\alpha}$$

$$\cos\psi = \sqrt{\frac{36\pi V^2}{F^3}} = \frac{1}{2}(2+\cos\alpha)\sqrt{1-\cos\alpha} .$$

Es ergibt sich

$$\cos\left(\frac{\pi-2\psi}{3}\right)=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

und damit also

$$\frac{F}{2}\cos\left(\frac{\pi-2\psi}{3}\right)=\pi a^2=f_u\,,$$

womit ersichtlich wird, dass auf der rechten Seite von (1.4) Gleichheit besteht.

b) A sei ein Kugelzylinder vom Radius a, und h bedeute die Höhe des zylindrischen Teils (vgl. Abb. 2). Zur Abkürzung setzen wir noch $h=\lambda a$. Die Werte sind

$$V\quad=\pi a^3\left(\frac{4}{3}+\lambda\right)$$

$$F\quad=2\pi a^2\,(2+\lambda)$$

$$\cos\psi=\sqrt{\frac{36\,\pi V^2}{F^3}}=\frac{4+3\lambda}{\sqrt{2(2+\lambda)^3}}.$$

Hier ergibt sich

$$\cos\left(\frac{\pi+\psi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{4+2\lambda}}\,,$$

so dass

$$F\cos^2\left(\frac{\pi+\psi}{3}\right)=\frac{F}{4+2\lambda}=\pi a^2=f_u$$

resultiert, womit bestätigt wird, dass in (1.4) Gleichheit auf der linken Seite gilt.

6. Als Schlussbemerkung sei noch eine direkte Anschrift für die in der Ungleichung (1.4) auftretenden Extremalwerte gegeben, wodurch das bearbeitete Problem nochmals in anderer Form präsentiert wird.

Für eigentliche konvexe Körper A des gewöhnlichen Raumes mit fest vorgeschriebenem Volumen V und ebensolcher Oberfläche F gilt

$$\sup_A\sup_u\sup_t\left\{\frac{f(A\cap E_{u,t})}{F}\right\}=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi-2\psi}{3}\right)\tag{6.1}$$

$$\inf_A\;\inf_u\;\sup_t\left\{\frac{f(A\cap E_{u,t})}{F}\right\}=\cos^2\left(\frac{\pi+\psi}{3}\right),\tag{6.2}$$

wobei u eine Richtung, $E_{u,t}$ die durch $\langle x,u\rangle=t$ gekennzeichnete Ebene und ψ den mit $\cos\psi=\sqrt{36\,\pi V^2/F^3}$ festgelegten isoperimetrischen Winkel anzeigen.

H. Hadwiger, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

[1] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, 2. Aufl. (Walter de Gruyter & Co Berlin 1956).

[2] H. Hadwiger, *Neue Ungleichungen für konvexe Rotationskörper*, Math. Ann. *122*, 175–180 (1950).