

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **30 (1975)**

Heft 4

PDF erstellt am: **24.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Hence a solution of  $\sigma^k(n) = 2n$  is possible only if  $m = 1$ , that is, if  $n = 2^a$ , in which case:

$$\begin{aligned}\sigma^k(n) &= \sigma^{k-1}(2^{a+1} - 1) \\ &\geq (k-1) + (2^{a+1} - 1).\end{aligned}$$

The last inequality forces  $k$  to be equal to 2 and  $2^{a+1} - 1$  to be prime.

To conclude the proof it suffices to note that if  $p$  is a Mersenne prime then  $(p+1)/2$  satisfies  $\sigma(\sigma(n)) = 2n$ .

Graham Lord, Temple University, Philadelphia, Pennsylvania, U.S.A.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers* (Oxford 1960), p. 240.  
 [2] D. SURYANARAYANA, *Super Perfect Numbers*, *El. Math.* 24, 16–17 (1969).

## Aufgaben

**Aufgabe 721.** The question whether, for an integer  $n > 1$ ,  $\varphi(n) \mid (n-1)$  implies that  $n$  is a prime, is open (cf., e.g., *American Math. Monthly* 80, 192–193 [1973]). Show that if  $n = 2^{2^s} + 1$  ( $s \geq 0$ ) and  $\varphi(n) \mid (n-1)$ , then  $n$  is a prime.

J. Steinig, Genève

*Solution:* We show the more general result that  $n$  is a prime whenever  $n = 1 + q^t$  ( $t > 0$ ,  $q$  prime) and  $\varphi(n) \mid (n-1)$ . (If this is true then we must have  $q = 2$ , for otherwise  $n$  is even and  $n > 2$ , since  $t > 0$ , so  $n$  cannot be a prime.) Let  $n = 1 + q^t = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_l^{\alpha_l}$ ,  $\alpha_i \geq 1$ . Clearly,  $p_i \nmid q$ . From the condition  $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_l^{\alpha_l-1} \prod_{i=1}^l (p_i - 1) \mid (n-1) = q^t$ , it follows that  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_l = 1$  and  $p_i = q^{t_i} + 1$ ,  $t_i \geq 0$ . Without loss of generality  $p_1 < p_2 < \dots < p_l$  and consequently  $t_1 < t_2 < \dots < t_l$ . If  $l > 1$  then  $n = p_1 p_2 \dots p_l = 1 + q^{t_1} + q^{t_2} + \dots + q^{t_l} + q^{t_1+t_2} + \dots + q^{t_1+t_2+\dots+t_l}$  and

$$n - 1 = q^t = q^{t_1} + q^{t_2} + \dots + q^{t_l} + q^{t_1+t_2} + \dots + q^{t_1+t_2+\dots+t_l} \equiv q^{t_1} \pmod{q^{t_1+1}},$$

a contradiction.

Apparently  $l = 1$ ,  $t = t_1$  and  $n = p_1$ .

O. P. Lossers, Eindhoven, The Netherlands

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), E. P. Bauhoff (Mannheim, BRD), C. Bindschedler (Küsnacht, ZH), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Carlitz (Durham, N.C., USA), J. Fehér (Pécs, Ungarn), L. Hämmerling (Aachen, BRD), H. Harborth (Braunschweig, BRD), H. Kappus (Rodgersdorf, SO), P. Kiss (Eger, Ungarn), A. Marshall (Madison, Wisconsin, USA), Chr. A. Meyer (Bern), H. Müller (Berlin), R. Shantaram (Flint, Michigan, USA), M. Vowe (Therwil, BL) und R. Wyss (Flumenthal, SO).

**Aufgabe 722.** Man beweise die Gültigkeit von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n^2+k^2} = \frac{1}{4} (\pi - \ln 4).$$

G. Bercea, München, BRD

*Lösung (mit Verallgemeinerung):* Sind  $c_0, c_1$  reelle Konstanten, so folgt unmittelbar aus der Definition des Riemannsches Integrals

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_0 n + c_1 k}{n^2 + k^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{c_0}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_0 n + c_1 k}{n^2 + k^2} \right) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_0 n + c_1 k}{n^2 + k^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_0 + c_1 k/n}{1 + (k/n)^2} \cdot \frac{1}{n} = \\ \int_0^1 \frac{c_0 + c_1 x}{1 + x^2} dx &= c_0 \cdot \arctg 1 + c_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln 2 = \frac{1}{4} (c_0 \pi + c_1 \ln 4). \end{aligned}$$

D. Laugwitz, Darmstadt, BRD

Weitere Lösungen sandten E. Braune (Linz, Österreich), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), H. W. Gould (Morgantown, West Virginia, USA), L. Hämmerling (Aachen, BRD), H. Harborth (Braunschweig, BRD), H. Kappus (Rodorsdorf, SO), O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), Chr. A. Meyer (Bern), R. Shantaram (Flint, Michigan, USA), J. R. Smart (Madison, Wisconsin, USA), Hj. Stocker (Wädenswil, ZH), M. Vowe (Therwil, BL) und R. Wyss (Flumenthal, SO).

*Anmerkung:* L. Hämmerling führt den Beweis für

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n - ka}{n^2 + k^2 a^2} \quad (0 < a \leq 1).$$

**Aufgabe 723.** On donne deux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , ayant  $O$  et  $K'$  comme centres de similitude externe et interne; une droite  $OAB$  et le cercle  $\Gamma$  tangent en  $A$  et  $B$  aux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Quel est le lieu du point  $z$ , intersection de la polaire de  $K'$  par rapport à  $\Gamma$  et de la droite  $OAB$ ?

J. Quoniam, St-Etienne, France

*Lösung:* Unter Ausschliessung des trivialen Falles gleich grosser Kreise  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ , für die  $O$  ein Fernpunkt ist, seien die Radien der Kreise  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  mit  $r$  und  $kr$  ( $k > 0, k \neq 1$ ) und die Entfernungen ihrer Mittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  von  $O$  mit  $m$  bzw.  $km$  bezeichnet. Die Tangenten an die Kreise  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  in den Punkten  $A$  bzw.  $B$  berühren auch  $\Gamma$  in diesen Punkten; ihr Schnittpunkt  $P$ , der von  $A$  und  $B$  gleich weit entfernt ist ( $PA = PB$ ), ist der Pol der Geraden  $OAB = \phi$  in bezug auf  $\Gamma$ . In der Polarität bezüglich  $\Gamma$  ist der Schnittpunkt  $Z$  der Polaren von  $K'$  mit der Polaren  $\phi$  von  $P$  der Pol der Gerade  $PK'$ , so dass das Tangentenpaar  $PA, PB$  und das Strahlenpaar  $PZ, PK'$  einander harmonisch teilen. Daher sind auch die Schnittpunkte dieser Strahlen mit  $\phi$ , also die Punkte  $A, B, Z$  und der Schnittpunkt mit  $PK'$  ein harmonischer Punktwurf. Die Kreise  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  werden von  $\phi$  noch ein zweites Mal in den Punkten  $A'$  bzw.  $B'$  geschnitten und dort von einem Kreis  $\Gamma'$  berührt. Daher liefert auf jeder Geraden  $\phi$  durch  $O$  der Schnittpunkt mit der Polaren von  $K'$  bezüglich  $\Gamma'$  noch einen weiteren Punkt  $Z'$ .

Die gesuchte Ortskurve wird mithin von jeder Geraden durch  $O$  in zwei (reell getrennten, zusammenfallenden oder konjugiert komplexen) Punkten geschnitten, ist also im wesentlichen ein Kegelschnitt. Ist  $\phi_t$  insbesondere eine durch  $O$  gehende gemeinsame Tangente von  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ , so sind  $A_t = A'_t$  und  $B_t = B'_t$  die Berührungspunkte von  $\phi_t$  mit  $\Gamma_1$  bzw.  $\Gamma_2$ ,  $P_t = P'_t$  ist der Halbierungspunkt von  $A_t B_t = A'_t B'_t$  und daher fallen  $Z'_t$  und  $Z_t$  in den Fernpunkt von  $\phi_t$ . Die gemeinsamen Tangenten aus  $O$  an  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  sind demnach Asymptoten des Kegelschnitts.

Für die Verbindungsgerade  $\phi_x$  von  $O$  mit  $M_1, M_2$  erhält man die Scheitel  $Z_x$  und  $Z'_x$  des Kegelschnitts.

Wenn die beiden Punktepaare mit den Abszissen  $x_1, x_2$  und  $x_3, x_4$  einander harmonisch trennen, gilt

$$x_4 = \frac{2x_1x_2 - (x_1 + x_2)x_3}{x_1 + x_2 - 2x_3}.$$

Die Punktepaare  $M_1, M_2$  und  $O, K'$ , ferner  $A_x, B_x$  und  $K', Z_x$ , sowie  $A'_x, B'_x$  und  $K', Z'_x$  liegen jeweils harmonisch. Daher erhält man aus  $x_1 = m, x_2 = km, x_3 = 0$  die Abszisse  $2km/(k+1)$  von  $K'$  und aus  $x_1 = m \pm r, x_2 = k(m \mp r), x_3 = 2km/(k+1)$  die Abszisse  $\pm 2kr/(k-1)$  von  $Z_x$  bzw.  $Z'_x$ . Der Kegelschnitt hat daher die Gleichung

$$x^2 - \frac{m^2 - r^2}{r^2} y^2 = \left( \frac{2kr}{k-1} \right)^2.$$

Er ist für  $m > r$  eine Hyperbel, für  $m = r$  ( $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  berühren einander in  $O$ ) ein paralleles Geradenpaar, für  $m < r$  eine Ellipse und da insbesondere für  $m = 0$  ( $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  sind konzentrisch) ein Kreis.

Ist  $S$  einer der zwei (reell getrennten, zusammenfallenden oder konjugiert komplexen und von den absoluten Punkten im allgemeinen verschiedenen) Schnittpunkte von  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ , und fällt  $\phi$  in die Gerade  $\phi_s = OS$ , so ist  $A_s = B_s = S$ , und  $\Gamma_s$  ist der Nullkreis um  $S$ . Die harmonischen Punktepaare  $M_1, M_2$  und  $O, K'$  werden aus  $S$  durch einen harmonischen Strahlwurf projiziert. Da  $AA'M_1$  und  $BB'M_2$  ähnliche gleichschenklige Dreiecke sind, schliesst  $\phi_s$  mit  $SM_1$  und  $SM_2$  gleiche Winkel ein, und  $SK'$  ist daher die zu  $\phi_s$  normale Symmetrale des Winkels  $M_1SM_2$ . Die Polare von  $K'$  bezüglich  $\Gamma_s$  fällt somit mit  $\phi_s$  zusammen, so dass  $Z_s$  jeder Punkt von  $\phi_s$  sein kann. Daher ist das Paar der Verbindungsgeraden von  $O$  mit den Schnittpunkten von  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  ebenfalls ein Bestandteil der gesuchten Ortskurve und hat die Gleichung

$$[r^2(k+1)^2 - m^2(k-1)^2] \cdot x^2 - (k+1)^2(m^2 - r^2)y^2 = 0.$$

Übrigens lässt sich, wenn  $O$  der innere und  $K'$  der äussere Ähnlichkeitspunkt der Kreise  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  ist, die analog definierte Ortskurve auf die gleiche Weise ermitteln.

K. Grün, Linz, Österreich

Eine weitere Lösung sandte C. Bindschedler (Küsnacht, ZH).

**Aufgabe 724.** Es seien  $k, m, n$  ( $k < n$ ) natürliche Zahlen und  $\nu(m)$  die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von  $m$ . Man beweise: Für  $n > (1 + \varepsilon)^k$  gilt  $\nu\left(\binom{n}{k}\right) \geq k - c_\varepsilon$ , wo  $c_\varepsilon$  nur von der positiven reellen Zahl  $\varepsilon$  abhängt.

P. Erdős, Budapest

*Lösung des Aufgabenstellers:* Es genügt zu zeigen, dass für  $n > (1 + \varepsilon)^k$  und  $k > k_0(\varepsilon)$

$$v \left[ \binom{n}{k} \right] > k - c_\varepsilon \tag{1}$$

gilt.

Die Primzahl  $p$  gehöre zu  $n - i$ ,  $0 \leq i \leq k - 1$ , wenn

$$p^\alpha \mid n - i, p^\alpha > k \tag{2}$$

gilt. Offenbar gehört eine Primzahl  $p$  höchstens zu einer Zahl  $n - i$ ,  $0 \leq i \leq k - 1$  (natürlich können aber mehrere Primzahlen  $p$  zu  $n - i$  gehören). Es seien  $0 \leq i_1 < \dots < i_t \leq k - 1$  die Zahlen  $i$ , wo keine einzige Primzahl zu den Zahlen  $n - i_r$ ,  $1 \leq r \leq t$  gehört. Es gilt offenbar

$$v \left[ \binom{n}{k} \right] \geq k - t, \tag{3}$$

da wegen (2)  $p \mid \binom{n}{k}$  folgt.

Um (1) zu zeigen, genügt es daher  $t < c_\varepsilon$  zu zeigen. Es sei  $(n - u, n - v) = d(u, v)$  ( $(n - u, n - v)$  ist der grösste gemeinsame Teiler). Offenbar gilt

$$\left. \begin{aligned} \prod_{r=1}^t (n - i_r) \left( \prod_{1 \leq i_{r_1} < i_{r_2} \leq k-1} d(n - i_{r_1}, n - i_{r_2}) \right)^{-1} &\leq \\ \prod_{p < k, p^\alpha p < k} p^\alpha p &< k^{\pi(k)} < e^{2k} \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

wegen  $\pi(k) < 2k/\log k$ . Aus (4) folgt nun

$$(n - k)^t < e^k k^{\binom{t}{2}}. \tag{5}$$

Aus (5) folgt aber durch leichte Rechnung, dass für  $n > (1 + \varepsilon)^k$ ,  $k > k_0(\varepsilon)$ ,  $t < c_\varepsilon$  und damit wegen (3) (1) folgt.

Die Rechnung ist wirklich leicht.  $t$  sei die kleinste Zahl mit  $(1 + \varepsilon)^t > e^4$ , also  $t < 4/\log(1 + \varepsilon)$ . Daher  $n - k > e^{3k}$ , und für  $k > k_0(\varepsilon)$  gilt

$$e^k > k^{\binom{t}{2}} \quad \text{für} \quad t < \frac{4}{\log(1 + \varepsilon)};$$

daher ist (5) falsch für  $k > k_0(\varepsilon)$  und  $t < 4/\log(1 + \varepsilon)$ .

Durch etwas kompliziertere Rechnung könnte man  $c_\varepsilon$  explizit berechnen (ohne die Annahme  $k > k_0(\varepsilon)$ ).

### Berichtigung

**Problem 724A.** Gibt es eine natürliche Zahl  $k_0(\varepsilon)$  derart, dass, in der Bezeichnung der Aufgabe 724 gilt

$$v \left( \binom{n}{k} \right) \geq k \quad \text{für alle} \quad k \geq k_0(\varepsilon) ?$$

Die Antwort ist dem Aufgabensteller nicht bekannt.

P. Erdős, Budapest

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis **10. Februar 1976**. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, p. 67), Problem 625B (Band 25, p. 68), Problem 645A (Band 26, p. 46), Problem 672A (Band 27, p. 68), Aufgabe 680 (Band 27, p. 116), Problem 724A (Band 30, p. 91).

**Aufgabe 745.** In einem ebenen Quadratgitter bezeichne  $A$  eine «Figur», d.h. eine nichtleere endliche Menge von Gitterquadraten,  $n(A)$  deren Anzahl. Weiter sei  $q^2(A)$  die Anzahl der Gitterquadrate in einem kleinsten,  $A$  enthaltenden achsenorientierten Quadrat im Gitter. Schliesslich setze man  $d(A) := n(A)/q^2(A)$ . Es wird nun eine Folge  $A_0, A_1, \dots, A_m, \dots$  von Figuren wie folgt definiert:  $A_0$  ist eine beliebige Ausgangsfigur;  $A_m$  entsteht aus  $A_{m-1}$ , indem man jedes Gitterquadrat hinzufügt, das mit einem solchen von  $A_{m-1}$  mindestens eine Gitterstrecke gemeinsam hat. Beweise, dass  $d(A_m) \rightarrow 1/2$  ( $m \rightarrow \infty$ ), unabhängig von  $A_0$ .

P. Wilker, Bern

**Aufgabe 746.** Eine Ungleichung am ebenen Dreieck mit Gleichheit genau für das gleichseitige Dreieck habe die Gestalt

$$0 < X = L s^2 \leq M r^2 + N r R + P R^2 = Y,$$

worin  $L, M, N, P$  von  $s, r, R$  unabhängige reelle Zahlen sind. Man bestimme bei festem  $u > 0$  und festem  $v < 2u$  die grösstmögliche Konstante  $k \geq 0$ , welche die Verschärfung

$$X + k (R - 2r) (uR - vr) \leq Y$$

von  $X \leq Y$  gestattet.

I. Paasche, München, BRD

**Aufgabe 747.** Es sei  $a$  eine ganze Zahl. Für welche natürlichen Zahlen  $n \geq 3$  wird der Quotient

$$A_n := \frac{(n-3)! (n-1) [a n^2 + (2a+3)n - 2] + 1}{n(n+2)}$$

ganzzahlig?

I. Paasche, München, BRD

**Aufgabe 748.** Für natürliche Zahlen  $n, k$  bezeichne  $[(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (n+k)]'$  das Produkt der Nichtprimzahlen in der Folge  $n+1, n+2, \dots, n+k$ . Man zeige, dass  $6! = 8 \cdot 9 \cdot 10$  die einzige Lösung der Gleichung  $n! = [(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (n+k)]'$  ist.

P. Erdős, Budapest, Ungarn