Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **30 (1975)**

Heft 2

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Sei p eine Primzahl, $a \not\equiv 0 \bmod p$ eine beliebige ganze Zahl und $a_i = a/i$; $1 \leq i \leq p - 1$. Dann gilt

$$a_1 (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_{p-1})$$

$$= \frac{a}{1} \frac{a(2-1)}{2} \frac{a(3-1)}{3} \cdots \frac{a(p-2)}{p-1} = \frac{a^{p-1}}{p-1}$$

oder

$$[a_1 (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_{p-1})] \, (p-1) = a^{p-1} . \tag{1}$$

Die $p - 1$ Faktoren in der eckigen Klammer sind mod p ganz und offensichtlich nicht durch p teilbar. Sie sind paarweise inkongruent, denn aus $a_1 \equiv a_1 - a_x$ würde sich $a_x \equiv 0$ und daraus $a \equiv 0$ ergeben, und aus $a_1 - a_x \equiv a_1 - a_y$ würde $a_x \equiv a_y$ und daraus $x \equiv y$ folgen. Das Produkt von $p - 1$ paarweise inkongruenten Faktoren, die nicht durch p teilbar sind, ist $\equiv (p-1)!$. Nach (1) gilt somit

$$-(p-1)! \equiv a^{p-1} \bmod p . \tag{2}$$

Die Kongruenz (2) gilt entsprechend unserer Voraussetzung für jede beliebige ganze Zahl $a \not\equiv 0 \bmod p$. Wegen $1 \equiv 1^{p-1}$ folgt daher aus (2)

$$1 \equiv 1^{p-1} \equiv -(p-1)! \equiv a^{p-1} \bmod p .$$

Damit sind beide Titelsätze simultan bewiesen. F. Stöwener, Mannheim

Aufgaben

Aufgabe 713. Give a proof of

$$c(m, n) = \sum_{\substack{d \mid n \\ d \mid m}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d ,$$

where

$$c(m, n) := \sum_{\substack{1 \leq h \leq n \\ (h, n) = 1}} \exp\left(\frac{2 \pi i h m}{n}\right) ,$$

using only the formula

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n = 1 \\ 0 & \text{if} \quad n > 1 \end{cases} .$$

D. Suryanarayana, Waltair, India

Lösung: Wir gehen von der bekannten Formel

$$\sum_{k=1}^{d} \exp\left(2 \pi i k \frac{m}{d}\right) = \begin{cases} d & \text{falls} \quad d \mid m \\ 0 & \text{falls} \quad d \nmid m \end{cases}$$

aus, die wir bei der letzten untenstehenden Gleichheit verwenden; bei der zweiten Gleichheit benutzen wir $\sum_{j\mid s}\mu(j)=\delta_{1,s}$ (Kronecker-δ-Symbol), und alle anderen Umformungen sind trivial:

$$c(m,n)=\sum_{\substack{h=1\\(h,n)=1}}^{n}\exp\left(2\pi i\frac{hm}{n}\right)=\sum_{h=1}^{n}\exp\left(2\pi i\frac{hm}{n}\right)\sum_{j\mid(h,n)}\mu(j)$$

$$=\sum_{h=1}^{n}\exp\left(2\pi i\frac{hm}{n}\right)\sum_{\substack{d\mid n\\ n/d\mid h}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d\mid n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\sum_{\substack{h=1\\ n/d\mid h}}^{n}\exp\left(2\pi i\frac{hm}{n}\right)$$

$$=\sum_{d\mid n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\sum_{k=1}^{d}\exp\left(2\pi ik\frac{m}{d}\right)=\sum_{\substack{d\mid n\\ d\mid m}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)d\,.$$

P. Bundschuh, Köln, BRD

Aufgabe 714. Es seien ABC ein Dreieck und S ein innerer Punkt von ABC. Die Transversalen AS, BS, CS sollen die Gegenseiten in den Punkten P, Q, R treffen. Es seien ferner

$$u=\frac{\overline{AS}}{\overline{SP}},\quad v=\frac{\overline{BS}}{\overline{SQ}},\quad w=\frac{\overline{CS}}{\overline{SR}},\quad x=\frac{\overline{CP}}{\overline{PB}},\quad y=\frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}},\quad z=\frac{\overline{BR}}{\overline{RA}}.$$

Man zeige, dass jeder der zwanzig 3reihigen Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix}-u & 1 & 1 & -y & 1 & 0\\ 1 & -v & 1 & 0 & -z & 1\\ 1 & 1 & -w & 1 & 0 & -x\end{pmatrix}$$

verschwindet und gewinne daraus bekannte Sätze der Elementargeometrie.

I. Paasche, München, BRD

Lösung: Da S im Inneren der konvexen Hülle von A, B, C liegt, gibt es eindeutig bestimmte positive reelle Zahlen α,β,γ mit $\alpha+\beta+\gamma=1$ und $\alpha\overrightarrow{SA}+\beta\overrightarrow{SB}+\gamma\overrightarrow{SC}=0$. Für die sechs Streckenverhältnisse ergibt sich dann

$$x=\frac{\beta}{\gamma},\quad y=\frac{\gamma}{\alpha},\quad z=\frac{\alpha}{\beta},\quad u=\frac{\beta+\gamma}{\alpha},\quad v=\frac{\gamma+\alpha}{\beta},\quad w=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}.$$

Bezeichnet man nun die Zeilen der zu untersuchenden Matrix mit z_1, z_2, z_3, so gilt $\alpha z_1+\beta z_2+\gamma z_3=(0,\dots,0)$. Also ist der Rang der Matrix kleiner als 3. Nach einem bekannten Satz der linearen Algebra verschwinden dann aber alle 20 3reihigen Minoren.

Für die zu folgernden Sätze der Elementargeometrie werden die Spalten der Matrix mit $s_1,\dots,s_6$ bezeichnet.

a) $|s_4,s_5,s_6|=0=-xyz+1$, Satz von Ceva.

b) $|s_1,s_2,s_3|=0=-uvw+2+u+v+w$, oder gleichwertig

$$\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1+v}+\frac{1}{1+w}=1,\quad \text{Satz von Euler-Gergonne.}$$

c) $|s_1, s_4, s_5| = 0 = yz + 1 - uz$ sowie die zyklischen Analoga
$|s_2, s_5, s_6| = 0$, $|s_3, s_4, s_6| = 0$, Beziehungen von H. van Aubel.

d) Ist S der Schwerpunkt des Dreiecks, so gilt $x = y = z = 1$, und aus c) folgt dann $u = v = w = 2$, das heisst die Teilung der Seitenhalbierenden durch S im Verhältnis 2:1.
M. Vowe, Therwil BL

Eine weitere Lösung sandte G. Bercea (München, BRD).

Anmerkung des Aufgabenstellers: Dieselbe Aufgabe lässt sich für einen äusseren Punkt eines gegebenen Dreiecks stellen, falls er nicht auf der Trägergeraden einer Seite liegt. So ist etwa dann $|s_2, s_3, s_6| = 0$ der Satz von Ceva für das Dreieck SBC mit Cevapunkt A. Im übrigen ist $|s_1, s_4, s_6| = 0$ der Satz von Menelaos für das Dreieck ACP mit Menelaosgeraden BQ.

Aufgabe 715. (Même notation que dans Aufgabe 712). a) Démontrer qu'on obtient les lignes des centres des deux groupes de cercles de Steiner d'un quadrilatère complet, en joignant le centre C_M du cercle de Miquel aux points de rencontre M_1, M_2 avec l'axe OM du cercle de centre M et de rayon R_M, puis en abaissant de M les perpendiculaires sur les droites M_1C_M, M_2C_M.

b) Démontrer que la distance entre les points limites de l'un des systèmes de cercles de Steiner est égale à $(2/\mu)\sqrt{R_\alpha R_\beta R_\gamma R_\delta}$, c'est-à-dire à $4\sqrt{\mu R_M}$.

J. Quoniam, St-Etienne, France

Solution par l'auteur: a) L'équation du cercle (δ_1) passant par les sommets A_{12}, A_{34} du quadrilatère complet (A_{ij}: point d'intersection des droites a_i, a_j) et les intersections des bissectrices intérieures B_{12} et B_{34} et des bissectrices extérieures B'_{12} et B'_{34} peut, en utilisant les abréviations suivantes:

$$C_{\alpha\beta} = (\alpha - \beta)(\gamma - \delta); \quad D_{\alpha\beta} = R_\alpha R_\beta - R_\gamma R_\delta; \quad E_{\alpha\beta} = \alpha\beta R_\gamma R_\delta - \gamma\delta R_\alpha R_\beta;$$
$$N = \mu^2 \sum \alpha\beta - M - \mu^4 + R_\alpha R_\beta R_\gamma R_\delta; \quad N' = \mu^2 \sum \alpha\beta - M - \mu^4 - R_\alpha R_\beta R_\gamma R_\delta;$$
$$D = \mu(\mu^2 \sum \alpha - \sum \alpha\beta\gamma)$$

se mettre sous la forme:

$$\mu^2 \{\mu^2 D_{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta}\}(x^2 + y^2) - \mu\{D_{\alpha\beta}(N + 2\mu^4) + 2\mu^2 E_{\alpha\beta}\} y - \mu\{D \cdot D_{\alpha\beta}\} x$$
$$+ \frac{1}{2}\{\mu^2 D_{\alpha\beta}(N + N' + 2\mu^4) + E_{\alpha\beta}(N' - N + 2\mu^4)\} = 0 .$$

Le coefficient angulaire de la droite joignant le point de Miquel au centre $C(\delta_1)$ s'obtient sous la forme N/D, indépendante des coefficients $D_{\alpha\beta}$ et $E_{\alpha\beta}$, et par conséquent sous une forme identique pour les droites joignant le point de Miquel aux centres des cercles (δ_2) et (δ_3).

Les cercles de Steiner proprement dits, de ce groupe, ayant pour équations

$$+ C_{\alpha\beta}(\delta_1) + C_{\alpha\gamma}(\delta_2) + C_{\alpha\delta}(\delta_3) = 0$$
$$- C_{\alpha\beta}(\delta_1) + C_{\alpha\gamma}(\delta_2) + C_{\alpha\delta}(\delta_3) = 0$$
$$+ C_{\alpha\beta}(\delta_1) - C_{\alpha\gamma}(\delta_2) + C_{\alpha\delta}(\delta_3) = 0$$
$$+ C_{\alpha\beta}(\delta_1) + C_{\alpha\gamma}(\delta_2) - C_{\alpha\delta}(\delta_3) = 0$$

les quatre centres de ces cercles ont la même ligne des centres que (δ_1), (δ_2), (δ_3).

Calculs et résultats similaires pour les cercles (γ_1), (γ_2), (γ_3) et les cercles de Steiner proprement dits de la seconde série dont les centres sont situés sur une droite passant par M et de coefficient angulaire N'/D.

Les coordonnées des points M_1 et M_2 sont: $x = 0$; $y = \mu - R_M$; $x = 0$; $y = \mu + R_M$, on trouve pour les coefficients angulaires de $C_M M_1$ et de $C_M M_2$ N/D et N'/D respectivement. Ces droites étant perpendiculaires on a $NN' = -D^2$.

b) En cherchant l'intersection du cercle (δ_1) avec la droite $y = \mu + (N'/D)\,x$ on obtient finalement l'equation $2\mu^2 x^2 = N$

$$\text{d'où}\quad x = \pm\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{N}{2}}\quad\text{et}\quad y = \mu \pm \frac{N'}{\mu D}\sqrt{\frac{N}{2}}$$

finalement, on obtient pour la distance entre les points limites du faisceau des cercles γ [points communs des cercles du groupe (δ)] l'expression:

$$\frac{2}{\mu}\sqrt{\frac{N-N'}{2}} = \frac{2}{\mu}\sqrt{R_\alpha \cdot R_\beta \cdot R_\gamma \cdot R_\delta}\quad\text{ou}\quad 4\sqrt{\mu \cdot R_M}\,.$$

Aufgabe 716. Bezeichnen α_1, α_2, α_3 die Masse der Innenwinkel eines Dreiecks, so gilt

$$\sum_{i=1}^{3} (\sin 3\,\alpha_i - \sin 2\,\alpha_i + \sin \alpha_i) \geq 0$$

mit Gleichheit genau für das gleichseitige Dreieck.

E. Braune, Linz, Donau, Österreich

Lösung: Wegen

$$\sin 3\alpha_i - \sin 2\alpha_i + \sin\alpha_i = 4\sin\alpha_i - 4\sin^3\alpha_i - \sin 2\alpha_i$$

ergibt sich zusammen mit

$$\sum_{i=1}^{3} \sin\alpha_i = \frac{s}{R}\,,\quad \sum_{i=1}^{3} \sin^3\alpha_i = \frac{s\,(s^2 - 6\,R\,r - 3\,r^2)}{4\,R^3}\,,\quad \sum_{i=1}^{3} \sin 2\,\alpha_i = \frac{2\,s\,r}{R^2}$$

(vgl. z.B. die Lösung von Aufgabe 672, Band 28, p. 75) aus der behaupteten Ungleichung die zu ihr äquivalente Ungleichung

$$s^2 \leq 4\,R^2 + 4\,R\,r + 3\,r^2\,.$$

Diese Ungleichung ist bekanntlich richtig (vgl. z.B. J. Steinig, Inequalities concerning the inradius and circumradius of a triangle, El. Math. *18* (1963), p. 128, (7)) mit Gleichheit genau für das gleichseitige Dreieck.

H. Frischknecht, Berneck SG

Weitere Lösungen sandten L. Bankoff (Los Angeles, California, USA), G. Bercea (München, BRD), C. Bindschedler (Küsnacht ZH), P. Bundschuh (Köln, BRD), H. Kappus (Rodersdorf SO), F. Leuenberger (Feldmeilen ZH), P. Nüesch (Lausanne), I. Paasche (München, BRD), M. Vowe (Therwil BL) und H. Warncke (Pôrto Alegre, Brasilien).

Anmerkung der Redaktion: L. Bankoff teilt mit, dass dieselbe Aufgabe als Nr. 288 zu finden ist im Pi Mu Epsilon Journal *5* (1973), p. 483–484. F. Leuenberger weist darauf hin, dass die linke Seite der behaupteten Ungleichung $(s/R^3)\,\overline{IH}^2$ ist, wobei I den Inkreismittelpunkt und H den Höhenschnittpunkt des in Frage stehenden Dreiecks bezeichnen.

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis **10. Oktober 1975**. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem . . . A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Aufgabe 737. (Für die Zwecke dieser Aufgabe wird 1 zu den Primzahlen gerechnet.) Eine Nichtprimzahl k heisse eine P-Zahl, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: Jede Primzahl lässt, durch k dividiert, als kleinsten positiven Rest wieder eine Primzahl. Man bestimme alle P-Zahlen. P. Wilker, Bern

Aufgabe 738. a) Es sei ein Parallelogramm $ABCD$ gegeben, und E, F bezeichnen Punkte auf BC bzw. CD. Die Parallele durch D zu FB schneide AB im Punkt G. Der Schnittpunkt von DE mit BF sei H. Man zeige, dass AH und GE parallel sind (Keine analytische Lösung!).

b) Man beweise mit Hilfe von a) den bekannten Satz, dass ein Dreieck mit zwei gleichlangen Winkelhalbierenden gleichschenklig sei. G. Bercea, München, BRD

Aufgabe 739. Es seien M eine endliche Menge und f eine Abbildung von M in sich. Ferner seien k die kleinste natürliche Zahl mit $f^k(M) = f^{k+1}(M)$ und i die kleinste natürliche Zahl mit $f^{i+1} \in \{f, f^2, \ldots, f^i\}$. Setzt man $f^k(M) = X$, so ist die Einschränkung g von f auf X eine Permutation von X. Man beweise: Ist r die Ordnung von g, so gilt $i = k + r - 1$ und $f^{i+1} = f^k$.

H. Lüneburg, Kaiserslautern, Bundesrepublik Deutschland

Aufgabe 740. a) Dans un quadrilatère complet formé par les droites a_1, a_2, a_3, a_4, les tangentes en A_{12} aux cercles (α_3) et (α_4) [(α_i) cercle circonscrit au triangle obtenu en supprimant la droite a_i] rencontrent les droites a_3, a_4 respectivement en des points $R_{A_{12}(\alpha_3)a_3}$ et $R_{A_{12}(\alpha_4)a_4}$ qui sont situés sur le cercle $A_{12}MA_{34}$ [M (point de Miquel), le point commun aux cercles circonscrits aux quatre triangles que l'on peut former avec les quatre côtés].

b) Les cercles $A_{12}MA_{34}$, $A_{13}MA_{24}$, $A_{14}MA_{23}$ coupent chacun en un second point différent de M les «droites de Steiner» Δ et Γ [lignes des centres respectifs des deux groupes de cercles de Steiner et des deux groupes de trois cercles (δ_1), (δ_2), (δ_3) et (γ_1), (γ_2), (γ_3), dont les combinaisons d'équations indiquées en Aufgabe 415 a) fournissent les équations des cercles de Steiner proprement dits]. δ_1, δ_2, δ_3 et γ_1, γ_2, γ_3 désignant respectivement les seconds points d'intersection des trois cercles $A_{12}MA_{34}, \ldots$ avec les droites Δ et Γ, les droites $\delta_1\gamma_1$, $\delta_2\gamma_2$, $\delta_3\gamma_3$ qui joignent les points situés sur un même cercle sont les médiatrices de $A_{12}A_{34}$, $A_{13}A_{24}$ et $A_{14}A_{23}$, et les six points δ_1, δ_2, δ_3; γ_1, γ_2, γ_3 sont les centres des cercles (δ_1), (δ_2), (δ_3); (γ_1), (γ_2), (γ_3).

c) Les tangentes en

A_{23} au cercle (α_1), en A_{13} au cercle (α_2), en A_{12} au cercle (α_3)

concourent en z_4 sur (α_4). J. Quoniam, St-Etienne, France