

Bericht

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **28 (1973)**

Heft 2

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Bericht

Mathematische Problemwettbewerbe 1970/71 und 1971/72 im Kanton Bern

Die kantonal-bernische «Informationsstelle für Mathematikunterricht» hat in den Wintersemestern 1970/71 und 1971/72 die Mathematikwettbewerbe 5 und 6 für Schüler der höheren Mittelschulen organisiert. Über die Wettbewerbe 1–4 (1966–1970) finden sich Berichte in *El. Math.* 23, 18–20 (1968); 25, 39–43, (1970); 26, 93–95 (1971).

Auf Wunsch der Teilnehmer wurden die Wettbewerbe 5 und 6 als Konkurrenzen für Zweiermannschaften ausgeschrieben. Beidemale waren zu Hause 3 Aufgabenserien zu je 5 Aufgaben zu bearbeiten; die 8 bestklassierten Mannschaften bestritten die Finalrunde in Klausur.

Erstmals seit Bestehen des Wettbewerbs befand sich in der Siegermannschaft der 6. Veranstaltung eine Schülerin, und zwar eine solche eines Literargymnasiums.

Im folgenden werden sämtliche Aufgaben der Wettbewerbe 5 und 6 wiedergegeben, allerdings in gestraffter Form. Die eigentlichen Aufgaben waren oft mit zusätzlichen Erläuterungen und Beispielen versehen.

Wettbewerb 5

Es wurden zwei Sorten Aufgaben gestellt, «leichtere» und «schwierigere». Die jeweils ersten zwei Aufgaben jeder Serie waren die leichteren.

- 1.1 Zu jeder natürlichen Zahl n ist der grösste natürliche Exponent m anzugeben, für den 2^m die Zahl $3^n + 1$ teilt.
- 1.2 Die Kartenspieler A , B und C leisten ihre Einsätze mit Spielmarken. Es stehen 8 verschiedene Sorten von Spielmarken zur Verfügung, die umkehrbar eindeutig den Geldwerten 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500 und 1000 Rappen entsprechen. Spieler A hat vier Marken vor sich liegen, ebenso Spieler B . Spieler C ist ein Neuling und kennt die Zuordnung der Markensorten zu den Geldwerten nicht. Hingegen ist ihm bekannt, dass die vier Marken von Spieler A einen Gesamtwert von Fr. 3.30, diejenigen von Spieler B einen solchen von Fr. 6.70 ausmachen. Er möchte nun Spielmarken so einkaufen, dass er die Zuordnung zu den Geldwerten entschlüsseln kann; beim Kauf einer Menge von Marken erfährt er nur den Gesamtpreis. Welches ist der kleinste Betrag, den C auslegen muss, um zu seinem Ziel zu gelangen?
- 1.3 Im Quadratgitter der Ebene seien $n \geq 2$ Gitterpunkte gegeben. Eine Verbindungsstrecke zweier dieser Gitterpunkte heisse M -Strecke, wenn ihr Mittelpunkt ein Gitterpunkt ist (nicht notwendigerweise einer der gegebenen). $f(n)$ bezeichne die minimale Anzahl von M -Strecken, die bei vorgegebenem n auftreten müssen, unabhängig von der Verteilung der n Gitterpunkte. Es ist $f(n) \geq 1$ für alle $n \geq k$; welches ist das kleinste k mit dieser Eigenschaft? Berechne $f(n)$ für alle $n \geq 2$.
- 1.4 Zwei inkongruente Dreiecke, die in den Winkeln und in 2 Seiten übereinstimmen, heissen «5-verwandt». Es ist ein Paar 5-verwandter Dreiecke anzugeben, deren sämtliche Seitenlängen ganzzahlig sind. Gibt es unendlich viele, wesentlich verschiedene (d.h. nicht paarweise ähnliche) Paare 5-verwandter Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen?

- 1.5 $(\dots)_b$ bedeute die Ziffernanschrift einer Zahl im Zahlssystem der Basis b . Bestimme den Grenzwert der Zahlenfolge $a_n = (0.123 \dots n)_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$
- 2.1 Das Kryptogramm $x + yz + yz + yxw = wzzv$ hat in jedem Zahlensystem der Basis $b \geq k$ (für passendes k) genau eine Lösung. Bestimme diese Lösung und das kleinstmögliche k .
Für eine bestimmte Basis c hat die Zahl $xywzv$ den Dezimalwert 138585; bestimme c .
- 2.2 Ein Dreieck ABC habe den Flächeninhalt F . Auf den Seiten BC, CA, AB seien die Punkte P, Q, R so gewählt, dass sie die jeweilige Seite im Verhältnis 1:2 teilen. Die Verbindungsgeraden durch jede der Ecken und die gegenüberliegenden Teilpunkte erzeugen ein Dreieck vom Flächeninhalt f . Bestimme f/F .
- 2.3 Beweise: Keine Zahl der Form $4^m (8k + 7)$, $m, k = 0, 1, 2, \dots$ lässt sich als Summe dreier Quadrate ganzer Zahlen darstellen.
- 2.4 Auf den Seiten eines beliebigen konvexen Vierecks werden nach aussen gleichschenklige ähnliche Dreiecke mit der Vierecksseite als Basis errichtet. Zeige, dass die Verbindungsgerade der Spitzen zweier gegenüberliegender Aufsatzdreiecke senkrecht steht zur Verbindungsgeraden der Höhenschnittpunkte der beiden andern Aufsatzdreiecke.
- 2.5 A, B seien endliche Mengen mit k resp. n Elementen. Bestimme die Anzahl $s(k, n)$ aller Surjektionen von A auf B .
- 3.1 Einem Winkel W sei ein Einheitskreis K_1 eingeschrieben. K_2 bezeichne einen Kreis, der ebenfalls W eingeschrieben ist und zudem K_1 berührt. Analog bezeichne K_n einen Kreis, der W eingeschrieben ist und K_{n-1} berührt; $n = 2, 3, \dots$. Man bestimme alle Winkel W , bei denen K_2 ganzzahligen Radius besitzt. Gibt es einen kleinsten Winkel W , bei dem alle K_n ganzzahligen Radius besitzen?
- 3.2 Gibt es eine endliche Menge M und in ihr eine zweistellige Relation $<$ mit den Eigenschaften (1) $a < a$ für kein $a \in M$, (2) für je zwei verschiedene $a, b \in M$ gilt entweder $a < b$ oder $b < a$, (3) zu jedem Paar $(a, b) \in M \times M$ mit $a < b$ gibt es ein $c \in M$ mit $a < c$ und $c < b$?
- 3.3 Gibt es Quadrupel paarweise verschiedener natürlicher Zahlen, deren Quadrate eine viergliedrige arithmetische Folge erster Ordnung bilden?
(Bemerkung: die Aufgabestellung stammt von P. Fermat 1640, die erste Lösung von L. Euler 1780. Die Eulersche Lösung ist aber wahrscheinlich unvollständig.)
- 3.4 L_0 sei ein System endlich vieler Teilmengen von N , der Menge der natürlichen Zahlen. Die Operationen S, V, K bedeuten der Reihe nach die Bildung endlich vieler Durchschnitte, endlich vieler Vereinigungen und die Komplementbildung bezüglich N (anzuwenden auf Mengensysteme aus N).
 S, V, K auf L_0 angewendet ergibt ein neues System L_1 ; auf dieses wieder S, V, K angewendet liefert L_2 undsofort.
Weise nach, dass es eine Zahl n derart gibt, dass $L_n = L_{n+k}$ für $k = 0, 1, 2, \dots$.
Falls L_0 aus r Mengen besteht, wieviele Mengen liegen dann höchstens in L_n ?
- 4.1 Beweise: Sind A, B, C drei nicht kollineare Punkte einer Ebene und ist R eine Gerade des Raumes derart, dass die Winkel zwischen R und den Geraden AB, BC, CA kongruent sind, so steht R senkrecht auf der Ebene.
- 4.2 Ist die Abbildung $f: R \rightarrow R$ mit $f(x) = x^3$ injektiv?

- 4.3 Die positive rationale Zahl a_0 werde als Näherungswert von $\sqrt{5}$ aufgefasst. Ferner sei $a_1 = (a_0 + 5a_0^{-1})/2$. Unter welchen Bedingungen für a_0 ist a_1 ein besserer Näherungswert für $\sqrt{5}$?
(Bemerkung: diese Aufgabe der Finalrunde wurde ebenfalls als «leicht» eingestuft).
- 4.4 In der Ebene E sei die dreistellige Operation $\{a, b, c\} \rightarrow (abc)$ erklärt, wo (abc) den Schwerpunkt der drei Punkte a, b, c bedeutet. Für welche Lagen der 5 Punkte a, b, c, d, e gilt $((abc)de) = (ab(cde))$?
- 4.5 r, s, a, b seien natürliche Zahlen mit $(r, s) = 1$. Beweise: Gilt $(r^2 + 3s^2)/(r^2 - s^2) = a^2/b^2$, so sind beide Zahlen $r^2 + 3s^2$ und $r^2 - s^2$ Quadrate natürlicher Zahlen.

Wettbewerb 6

- 1.1 Löse das dezimale Kryptogramm $abc: bbbb = 0. bcd b cdb \dots$
- 1.2 Auf einem Schachbrett stehen 10 Figuren auf den Feldern $a5678, b678, c78, d8$. Die Steine sollen in die zentralsymmetrische Lage übergeführt werden; erlaubte Züge sind dabei lotrechtes oder waagrechtes Überspringen eines Nachbarsteins. Ist die Überführung möglich ?
- 1.3 Sei n eine natürliche Zahl grösser als 2. Man bildet die Summe aller zwischen 1 und n gelegenen Zahlen, die zu n nicht teilerfremd sind. Bei der Division dieser Summe durch n erhält man bei ungeradem n den Rest 0, bei geradem n den Rest $n/2$. Beweise dies.
- 1.4 f bezeichne eine für alle natürlichen Zahlen erklärte Funktion mit rationalen Funktionswerten. Bestimme alle f , welche die Gleichung $f(x) f(y) = f(6xy)$ für alle natürlichen x, y erfüllen.
- 1.5 Die natürliche Zahl n sei in einem Zahlensystem der Basis b dargestellt. Mit $q_b(n)$ sei die Quersumme 2. Grades, das heisst die Summe der Quadrate der Ziffern von n , bezeichnet. n heisst Fixelement, wenn $q_b(n) = n$ ist. Bestimme alle Fixelemente, wenn b eine ungerade Primzahl ist.
(Bemerkung: Eine allgemeine Lösung der Aufgabe ist nicht bekannt.)
- 2.1 Beweise den Satz: Sei b eine ungerade natürliche Zahl, $b \geq 3$, und sei k eine natürliche Zahl. Es gibt stets eine ganze Zahl z derart, dass z^2 , im Zahlensystem der Basis b geschrieben, einen Endziffernblock von mindestens k Ziffern 1 aufweist. Gilt ein analoger Satz auch im Zahlensystem der Basis 10 ?
- 2.2 Ein 6×6 -Quadrat sei mit 18 2×1 -Rechtecken überdeckt. Zeige, dass es mindestens eine Gerade gibt, welche mit dem Quadrat, aber mit keinem der Rechtecke innere Punkte gemeinsam hat.
- 2.3 Eine gerade quadratische Pyramide wird durch eine Ebene E , welche durch eine Quadratseite geht, in zwei volumgleiche Körper zerlegt. φ sei der Neigungswinkel von E zur Quadratabene. Untersuche φ in Abhängigkeit von s , der Länge der Quadratseite, und h , der Pyramidenhöhe. Kann φ gleich 45° sein ?
- 2.4 Ein unbegrenzter Vorrat an Treibstoff befindet sich am Rande einer a km breiten Wüste. Ein Lastwagen hat einen Tankinhalt von 90 Litern Treibstoff; er verbraucht 15 Liter, um 100 km zurückzulegen. Zudem kann er an jedem Punkt der Wüste Treibstoffdepots beliebiger Grösse anlegen.
Wie gross darf a sein, wenn der Lastwagen die Wüste mit einem totalen Verbrauch von 180 Litern durchqueren will? Und bei einem totalen Verbrauch von 270 Litern?
- 2.5 Man denke sich n^2 Punkte ($n \geq 3$) in einem quadratischen Schema angeordnet.

Zwei Spieler A und B spielen nach folgenden Regeln: A zieht eine waagrechte oder lotrechte Strecke, die zwei oder mehr Punkte des Schemas verbindet. B zieht auf analoge Weise, doch muss seine Strecke in einem Endpunkt der von A gezogenen Strecke beginnen. So wird abwechselnd gezogen, wobei kein Punkt mehr als einmal durchlaufen werden darf.

Der Spieler, der die letzte mögliche Strecke ziehen muss, hat verloren. Gibt es eine Gewinnstrategie für A ?

- 3.1 a, b seien zwei natürliche Zahlen mit $(a, b) = 1$. Eine Menge T natürlicher Zahlen enthalte a und b und mit jedem Zahlenpaar x, y auch deren Summe $x + y$.
Weise nach, dass T einen Endabschnitt der Menge der natürlichen Zahlen enthält.
- 3.2 Bestimme diejenigen Dreiecke, die sich in drei zueinander kongruente Dreiecke zerlegen lassen.
- 3.3 Sei g eine fest gewählte natürliche Zahl ≥ 2 ; (x) bezeichne den kleinsten nicht-negativen Rest bei der Division der natürlichen Zahl x durch g . Es werden nun g nicht notwendigerweise verschiedene Zahlen $z_1, z_2, \dots, z_g, 0 \leq z_i \leq g - 1$, vorgegeben und mit ihnen eine Zahlenfolge konstruiert gemäss $z_{g+n} = (z_n + z_{n+1})$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Beweise, dass die Folge für jedes g und für jede Auswahl der z_i periodisch wird. Bestimme die maximalen Periodenlängen für $g = 2, 3, 4$ und 5 . Gibt es Zahlen g , bei denen nur eine einzige Periodenlänge auftritt?
- 3.4 Die beiden natürlichen Zahlen A, B haben im Zahlensystem der Basis $b \geq 3$ die Darstellungen $A = (2, a)$ und $B = (1, a, a + 1)$. Dabei gelte $1 \leq a + 1 < b$. Für welche Basen b und für welche a hat die quadratische Gleichung $x^2 - Ax + B = 0$ ganzzahlige Lösungen?
- 3.5 Ein Graph, bei dem zwischen zwei Ecken höchstens eine Kante verläuft, habe die folgende Eigenschaft: entnimmt man ihm eine beliebige Ecke und alle von ihr ausgehenden Kanten, so ist der Restgraph zusammenhängend. Weiter habe der Graph mindestens drei Ecken.
Beweise: je zwei Ecken A und B lassen sich stets durch zwei Wege verbinden, die ausser A und B keine Ecken gemeinsam haben.
(Bemerkung: Zur Vereinfachung war in der beim Wettbewerb gestellten Aufgabe noch verlangt, dass sich A und B durch einen Weg von höchstens drei Kanten verbinden lassen.)
- 4.1 Es sei $x_1 = 3^2, x_2 = 4^{x_1}, x_3 = 5^{x_2}, \dots, x_7 = 9^{x_6}$. Bestimme die beiden letzten Ziffern von x_7 .
- 4.2 Kann in der Zahlenfolge $t_n = 1/2 + 3/4 + 5/6 + \dots + (2n - 1)/(2n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) eine ganze Zahl auftreten?
- 4.3 In ein quadratisches Schema von 5×5 Feldern werden fortlaufend die Zahlen $a, a + 1, a + 2, \dots, a + 24$ eingetragen. Man wählt 5 Felder aus, die in paarweise verschiedenen Zeilen und Spalten liegen und addiert die darin liegenden Zahlen. Beweise, dass die Summe von der Auswahl der Felder unabhängig ist.
- 4.4 Unter allen Vierecken, die in einer abgeschlossenen Kreisscheibe liegen, ist eines mit maximalem Flächeninhalt anzugeben.
- 4.5 Gibt es ein konvexes Polyeder mit 7 Kanten?
- 4.6 Ist eine Darstellung $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ mit rationalen a, b möglich?
- 4.7 Die Permutationen der Ziffern $1, 2, 3, \dots, 7$ werden als 7-stellige Zahlen gedeutet. Wieviele darunter sind durch 11 teilbar?

- 4.8 Beweise: Sind das reguläre p -Eck und das reguläre q -Eck ($p, q \geq 3$, $(p, q) = 1$) mit Zirkel und Lineal konstruierbar, so auch das reguläre pq -Eck.
- 4.9 Ist eine Darstellung der Zahlenfolge $1, 1, -1, 1, 1, -1, \dots$ durch eine Formel der Gestalt $z_n = (-1)^{an^2 + bn + c}$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$) möglich?

J. Binz, P. Wilker

Mathematisches Institut der Univ. Bern

Literaturüberschau

Elementare Zahlen- und Grössenbereiche. Von ARNOLD KIRSCH. (Moderne Mathematik in elementarer Darstellung, 10). 250 Seiten. DM 27,-. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1970.

Wer heute im Unterricht den Begriff der natürlichen Zahl als Kardinalzahl einer endlichen Menge gewinnen will und sich über den wissenschaftlichen Hintergrund seines Tuns orientieren möchte, findet zahlreiche passende Darstellungen. Anders ist es mit den Erweiterungen des Zahlbereichs: Wissenschaftliche Abhandlungen ergeben oft für den Unterricht recht wenig, da sich hier z. B. die ganzen Zahlen kaum als Äquivalenzklassen einführen lassen; didaktische Darstellungen erschöpfen sich dagegen oft in der Darstellung zahlloser Einzelheiten, die zeigen, wie etwa die berühmten Fälle «negative Zahl mal negative Zahl» und «Bruch mal Bruch» motiviert werden können, sie bringen jedoch keine geschlossene Darlegung. Es scheint uns das grosse Verdienst dieses Buches von Arnold Kirsch zu sein, diese Lücke zu schliessen. Auch er gewinnt die natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen von Mengen. Dann aber führt er den Begriff des *Grössenbereiches* ein; die Längen (als Klassen kongruenter Strecken aufgefasst) bilden zum Beispiel einen solchen Bereich. Jetzt lassen sich die natürlichen Zahlen als Operatoren («Strecker») deuten, die den Grössenbereich in sich selbst abbilden. In naheliegender Art können dann von einem Grössenbereich gewisse Teilbarkeitseigenschaften gefordert werden; dies ermöglicht, nun die Brüche als «Stauer» und «Strecker», also wiederum als Operatoren, einzuführen. Schliesslich wird der Grössenbereich als Positivbereich einer angeordneten abelschen Gruppe aufgefasst, und jetzt können auch die rationalen Zahlen als Operatoren eingeführt werden. – Auf diese hier nur ganz kurz skizzierte Art kann man von den natürlichen Zahlen auf einem sehr schulgemässen Wege zu den rationalen Zahlen gelangen; man wird dabei in «naiver» Weise auf einem geeigneten Grössenbereich operieren. Das ganze Fundament, auf dem dieses Vorgehen beruht (und das dem Lehrer bekannt sein sollte), ist im vorliegenden Buch in sehr gründlicher, gut lesbarer Darstellung zu finden; die Genese des Zahlbegriffs, seine Anwendbarkeit und Motivierungen stehen dabei im Vordergrund. Im ganzen Text spürt man das Bestreben des Verfassers, verständlich zu sein und mit vielen Beispielen den Brückenschlag zur Schulmathematik auch wirklich auszuführen.

R. INEICHEN

Introduction to Mathematics for Life Scientists. Von EDWARD BATSCHELET. 495 Seiten. (Biomathematics, Vol. 2). DM 49,-. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New-York 1971.

Es dürfte kein einfaches Unterfangen sein, eine «Mathematik für Biologen» zu schreiben: Leicht könnte der Autor, wenn er, wie im vorliegenden Fall, Mathematiker ist, der Gefahr erliegen, durch seine zu wissenschaftliche Darstellung den Biologen abzustossen; ebenso nahe liegt aber die Gefahr, blosses Rezepte zu vermitteln. Edward Batschelet vermeidet diese beiden Irrwege mit Erfolg: Neue Begriffe und Methoden werden zuerst in mehr intuitiver, oft sehr anschaulicher Art eingeführt. Die Beispiele sind dabei aus den verschiedensten Teilgebieten der Biologie entnommen. Dann wird klar herausgearbeitet, wieso und wozu ein neues Verfahren notwendig ist. Schliesslich erfolgt die korrekte mathematische Formulierung mit den notwendigen und «zumutbaren» Beweisen. Eine reichhaltige Sammlung von Aufgaben mit den Resultaten im Anhang ermöglicht Übung und Vertiefung. – Inhalt: Real Numbers – Sets and Symbolic Logic – Relations and Functions – The Power Function and Related Functions – Periodic Functions – Exponential and Logarithmic Functions – Graphical Methods – Limits – Differential and Integral Calculus – Ordinary Differential Equations – Functions of Two or More Independent Variables – Probability – Matrices and Vectors – Complex Numbers.

Die Darstellung erfolgt mit einer gewissen Breite, die auch das Selbststudium ermöglicht. Die grosse Erfahrung, die der Verfasser im Gesamtgebiet der Biomathematik besitzt, zeigt sich