Eine Verallgemeinerung des Satzes von Dandelin

Autor(en): **Herzer, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **27 (1972)**

Heft 3

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-28630

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Für Strahlflächen mit beliebigen Richtkegeln und für Untersuchungen von besonderen Fusspunktkurven kann das zweite Verfahren immerhin gelegentlich von Nutzen sein.

Josef Krames, Wien

LITERATUR

[1] J. Krames, *Zur Geometrie des Bennettschen Mechanismus, Über symmetrische Schrotungen V*, Sber. Akad. Wiss. Wien [math.-nat. IIa] *146*, 159–173 (1937).

[2] J. Krames, *Zur Ermittlung eines Objektes aus zwei Perspektiven*, Mh. Math. Phys. *49*, 327–354 (1941).

[3] E. Müller – J. Krames, *Vorlesungen über darstellende Geometrie*, Band 3: *Konstruktive Behandlung der Regelflächen* (Leipzig und Wien 1931), S. I–VIII, 1–298.

[4] L. Vietoris, *Eine besondere Erzeugungsweise der Raumkurven vierter Ordnung zweiter Art*, Sber. Akad. Wiss. Wien [math.-nat. IIa] *125*, 259–283 (1916).

Eine Verallgemeinerung des Satzes von Dandelin

Sei V ein K-Linksvektorraum vom Range n. Der Verband der Unterräume von V heisst projektiver Raum vom Range n über K, geschrieben $L(V)$. Unterräume vom Range 1 heissen Punkte, solche vom Range 2 heissen Gerade.

Dann gilt bekanntlich folgender Satz ([3], Theorem 4.2.1. Nach [1], 35, S. 62 wurde die eine Richtung dieses Satzes 1824 von Dandelin aufgezeigt):
$L(V)$ sei ein projektiver Raum vom Range n über K, $n = 4$. Genau dann gilt in $L(V)$ der Satz von Pappos, wenn folgendes gilt:
Sind a_1, a_2, a_3, a_4 Gerade von $L(V)$ mit der Eigenschaft, dass paarweise verschiedene stets den Durchschnitt $\{0\}$ besitzen, und b_1, b_2, b_3, b_4 Gerade von $L(V)$, von denen paarweise verschiedene ebenfalls den Durchschnitt $\{0\}$ besitzen, ist überdies $a_i \cap b_k \neq \{0\}$ für $i = 1, 2, 3, 4$, $k = 1, 2, 3, 4$, mit $(i, k) \neq (4, 4)$, dann folgt auch $a_4 \cap b_4 \neq \{0\}$.

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes soll als «verallgemeinerter Satz von Dandelin» bezeichnet und hier abgeleitet werden. Es ist möglich, die Beweise aus den Axiomen der projektiven Geometrie ohne Zuhilfenahme von Koordinaten zu führen. Da der Anmarschweg zu dieser Art von Beweisführung aber ziemlich lang ist, wollen wir hier zum Beweis lieber den zugrundeliegenden Vektorraum benutzen. Dabei ist der Satz von Hilbert zu beachten: Der Satz von Pappos ist äquivalent zur Kommutativität des Koordinatenkörpers (vgl. [3], Theorem 3.2.3. und 3.4.4.).

Wir gehen im folgenden stets von einem projektiven Raum $L = L(V)$ vom Range $m \cdot n$ aus mit $m > 1$ und $n > 1$.

Definition 1. Ein (m, n)-Rahmen von L ist eine Menge $\{M_0, M_1, \dots, M_n\}$ von Unterräumen von V, sämtlich vom Range m, für welche gilt:

$$\bigoplus_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} M_i = V\,, \quad j = 0, 1, \dots, n\,.$$

Definition 2. Ein Gebilde $\mathfrak{Q}_{m,n}$ ist eine Menge $\{M_0, M_1, \dots, M_n; N_0, N_1, \dots, N_m\}$ von Unterräumen von V mit folgenden zusätzlichen Eigenschaften:
$\{M_0, M_1, \dots, M_n\}$ ist ein (m, n)-Rahmen von L.
$\{N_0, N_1, \dots, N_m\}$ ist ein (n, m)-Rahmen von L.
Es gilt $M_i \cap N_k \neq \{0\}$, $i = 0, 1, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots, m$.

Ist (v_{ik}), $i = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, m$ eine Basis von V, dann lässt sich offenbar ein Gebilde $\mathfrak{Q}_{m,n}$ wie folgt definieren:

$$M_i = \langle v_{ik} \mid k = 1, \dots, m\rangle, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$M_0 = \langle \sum_{i=1}^{n} v_{ik} \mid k = 1, \dots, m\rangle.$$

$$N_k = \langle v_{ik} \mid i = 1, \dots, n\rangle, \quad k = 1, \dots, m.$$

$$N_0 = \langle \sum_{k=1}^{m} v_{ik} \mid i = 1, \dots, n\rangle.$$

Es ist

$$M_j \cap N_r = \langle v_{jr}\rangle, \quad j = 1, \dots, n; \quad r = 1, \dots, m$$

$$M_0 \cap N_r = \langle \sum_{i=1}^{n} v_{ir}\rangle, \quad r = 1, \dots, m.$$

$$M_j \cap N_0 = \langle \sum_{k=1}^{m} v_{jk}\rangle, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$M_0 \cap N_0 = \langle \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} v_{ik}\rangle.$$

Wir zeigen nun, dass sich umgekehrt jedes Gebilde $\mathfrak{Q}_{m,n}$ mit geeigneter Basis (v_{ik}) in dieser Form darstellen lässt.

Die Menge $\{M_0, M_1, \dots, M_n; N_0, N_1, \dots, N_m\}$ stelle ein Gebilde $\mathfrak{Q}_{m,n}$ dar. Wegen $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i = V$ sind $M_1 \cap N_r, \dots, M_n \cap N_r$ linear unabhängig. Nach Definition 2 muss jeder dieser Durchschnitte mindestens den Rang 1 haben; sie können aber auch keinen höheren Rang besitzen, sonst folgte, dass der Rang von N_r grösser als n wäre. Indem wir ebenso noch $\bigoplus_{k=1}^{m} N_k = V$ beachten, erhalten wir schliesslich: $M_i \cap N_k$ sind linear unabhängige Punkte für $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$. Also können wir eine Basis (v'_{ik}) von V so wählen, dass

$$M_i \cap N_k = \langle v'_{ik}\rangle, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m.$$

Da auch $M_0 \cap N_k$ ein Punkt ist, folgt

$$M_0 \cap N_k = \langle \sum_{i=1}^{n} a_{ik} v'_{ik}\rangle, \quad k = 1, \dots, m$$

mit geeigneten a_{ik}. Wäre für ein festes (j, r) etwa $a_{jr} = 0$, so folgte

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} M_i \neq V,$$

da kein Vektor dieser Summe das Basiselement v'_{jr} als Summanden enthält. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von $\mathfrak{Q}_{m,n}$. Also gilt $a_{ik} \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, m$. Ebenso schliesst man, dass

$$M_i \cap N_0 = \langle \sum_{k=1}^{m} b_{ik} v'_{ik} \rangle, \quad i = 1, \ldots, n$$

mit geeigneten $b_{ik} \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m$. Wegen $M_0 \cap N_0 \neq \{0\}$ erhalten wir nun für geeignete x_k, y_i:

$$\sum_{k=1}^{m} x_k (\sum_{i=1}^{n} a_{ik} v'_{ik}) = \sum_{i=1}^{n} y_i (\sum_{k=1}^{m} b_{ik} v'_{ik}) .$$

Koeffizientenvergleich ergibt dann

$$x_k a_{ik} = y_i b_{ik}, \quad i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m .$$

Wäre für ein r etwa $x_r = 0$, so folgte wegen $b_{ir} \neq 0$ nun $y_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$, also $M_0 \cap N_0 = \{0\}$. Also ist $z_{ik} := x_k a_{ik} = y_i b_{ik} \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m$. Setzen wir $v_{ik} = z_{ik} v'_{ik}$, so bildet daher auch (v_{ik}) eine Basis von V. Wir erhalten:

$$M_i \cap N_k = \langle z_{ik} v'_{ik} \rangle = \langle v_{ik} \rangle, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, m .$$

$$M_0 \cap N_k = \langle x_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} v'_{ik} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_k a_{ik} v'_{ik} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} v_{ik} \rangle, \quad k = 1, \ldots, m .$$

$$M_i \cap N_0 = \langle y_i \sum_{k=1}^{m} b_{ik} v'_{ik} \rangle = \langle \sum_{k=1}^{m} y_i b_{ik} v'_{ik} \rangle = \langle \sum_{k=1}^{m} v_{ik} \rangle, \quad i = 1, \ldots, n .$$

$$M_0 \cap N_0 = \langle \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} z_{ik} v'_{ik} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} v_{ik} \rangle . \qquad \text{q.e.d.}$$

Definition 3. $(Q_{m,n})$ bezeichnet folgenden Schliessungssatz: In L sei ein Gebilde $\mathfrak{Q}_{m,n}$ (mit den Bezeichnungen von Definition 2) gegeben. M sei ein weiterer Unterraum von V vom Range m und N ein weiterer Unterraum von V vom Range n.

Gilt dann

$$M \cap N_k \neq \{0\} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, m ,$$

und

$$M_i \cap N \neq \{0\} \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, n ,$$

dann folgt $M \cap N \neq \{0\}$.

Jetzt sind wir in der Lage, den angestrebten Satz zu formulieren und zu beweisen

Satz (Verallgemeinerter Satz von Dandelin). $L = L(V)$ sei ein projektiver Raum über K vom Range $m \cdot n$ mit $m > 1, n > 1$. Genau dann gilt in L der Schliessungssatz $(Q_{m,n})$, wenn in L der Satz von Pappos gilt.

Beweis. Es gibt eine Basis (v_{ik}), $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$ von V, so dass $\mathfrak{Q}_{m,n}$ die im Anschluss an Definition 2 aufgeführte einfache Darstellung besitzt. Wie zuvor schliessen wir, dass $M \cap N_k$ und $M_i \cap N$ jeweils Punkte sind.

Sei nun $M \cap N_k = \langle \sum_{i=1}^{n} c_{ik} v_{ik} \rangle$, $k = 1, \dots, m$, dann folgt aus $M \cap N_0 \neq \{0\}$ für geeignete x_k, c_i die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{m} x_k \Big(\sum_{i=1}^{n} c_{ik} v_{ik}\Big) = \sum_{i=1}^{n} c_i \Big(\sum_{k=1}^{m} v_{ik}\Big) ,$$

und daraus wieder die Gleichungen

$$x_k c_{ik} = c_i , \quad x_k \neq 0, \quad k = 1, \dots, m .$$

Also:

$$M \cap N_k = \langle x_k \sum_{i=1}^{n} c_{ik} v_{ik} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_k c_{ik} v_{ik} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} c_i v_{ik} \rangle .$$

Es folgt

$$M = \langle \sum_{i=1}^{n} c_i v_{ik} \mid k = 1, \dots, m \rangle.$$

Ebenso erhalten wir mit geeigneten d_k:

$$N = \langle \sum_{k=1}^{m} d_k v_{ik} \mid i = 1, \dots, n \rangle.$$

In L gelte nun der Satz von Pappos, d.h. K ist kommutativ. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{m} d_k \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i v_{ik}\Big) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} d_k c_i v_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_i d_k v_{ik} = \sum_{i=1}^{n} c_i \Big(\sum_{k=1}^{m} d_k v_{ik}\Big) \in M \cap N .$$

Dieser Vektor kann aber nicht $= 0$ sein, da wenigstens für ein (j, r) gilt $c_j \neq 0$ und $d_r \neq 0$ und jedes Basiselement v_{ik} in der Summe genau einmal vorkommt. Daher folgt:

$M \cap N \neq \{0\}$, das heisst, es gilt $(Q_{m,n})$.

Umgekehrt sei nun in L die Gültigkeit von $(Q_{m,n})$ vorausgesetzt.
Wegen $M \cap N \neq \{0\}$ gibt es Zahlen x_k und y_i, so dass gilt

$$\sum_{k=1}^{m} x_k \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i v_{ik}\Big) = \sum_{i=1}^{n} y_i \Big(\sum_{k=1}^{m} d_k v_{ik}\Big) .$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$x_k c_i = y_i d_k , \quad i = 1, \dots, n , \quad k = 1, \dots, m .$$

Wir wählen nun insbesondere M und N mit

$$c_1 \neq 0 \neq c_2 , \qquad d_1 \neq 0 \neq d_2 .$$

Dann folgt: $x_1 \neq 0 \neq x_2$, $y_1 \neq 0 \neq y_2$.
Für $k = 1, 2$ gelten die Gleichungen

$$x_k c_1 = y_1 d_k , \qquad x_k c_2 = y_2 d_k .$$

Wir multiplizieren die Ausdrücke auf den beiden Seiten der ersten Gleichung von links mit den Inversen der Ausdrücke (diese existieren!) auf den entsprechenden Seiten der zweiten Gleichung:

$$c_2^{-1} x_k^{-1} x_k c_1 = d_k^{-1} y_2^{-1} y_1 d_k .$$

Es folgt:

$$y_2^{-1} y_1 = d_1 c_2^{-1} c_1 d_1^{-1} = d_2 c_2^{-1} c_1 d_2^{-1}$$

oder

$$d_2^{-1} d_1 c_2^{-1} c_1 = c_2^{-1} c_1 d_2^{-1} d_1 .$$

Offenbar können $s := c_2^{-1} c_1$ und $r := d_2^{-1} d_1$ beliebige Werte aus K^* annehmen, d.h. es gilt $r s = s r$ für alle $r, s \in K^*$. Also ist K kommutativ, und in L gilt der Satz von Pappos. q.e.d.

Bemerkung. Die Berechnung von M hat als Nebenergebnis: Durch jeden Punkt von N_r geht genau ein M der verlangten Art. Sei $M' = \langle \sum_{i=1}^{n} c_i' v_{ik} \mid k = 1, \ldots, m \rangle$ ein weiterer Unterraum vom Range m, der sämtliche N_k, $k = 0, 1, \ldots, m$, trifft, und sei $M \cap M' \neq \{0\}$. Es gibt also x_k, y_k mit

$$\sum_{k=1}^{m} x_k \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i v_{ik}\Big) = \sum_{k=1}^{m} y_k \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i' v_{ik}\Big) .$$

Sei etwa $x_r \neq 0$, also auch $y_r \neq 0$. Dann gilt

$$x_r c_i = y_r c_i' , \quad i = 1, \ldots, n .$$

Daher

$$M \cap N_r = \langle x_r \sum_{i=1}^{n} c_i v_{ir} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_r c_i v_{ir} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} y_r c_i' v_{ir} \rangle =$$

$$\langle y_r \sum_{i=1}^{n} c_i' v_{ir} \rangle = M' \cap N_r ,$$

also $M = M'$.

Also bildet die Menge $\mathfrak{M}$ aller Unterräume M vom Range m mit $M \cap N_k \neq \{0\}$ für $k = 0, 1, \ldots, m$ eine Schar zueinander paarweise windschiefer Räume und die Menge $\mathfrak{N}$ aller Unterräume N vom Range n mit $M_i \cap N \neq \{0\}$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ eine zweite Schar paarweise windschiefer Räume.

Die Gültigkeit von $(Q_{m,n})$ in L besagt dann gerade: Jedes Element der Schar $\mathfrak{M}$ trifft jedes Element der Schar $\mathfrak{N}$. — Dann sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ die beiden Scharen einer Segreschen Mannigfaltigkeit $S_{m,n}$, die durch $\mathfrak{Q}_{m,n}$ also schon eindeutig bestimmt ist und genau die Vektoren der Form $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_i d_k v_{ik}$ enthält (vgl. [2], Kap. IV, insbes. § 33.5).

Daher lässt sich der verallgemeinerte Satz von Dandelin auch auffassen als die Angabe einer notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Existenz einer Segreschen Mannigfaltigkeit $S_{m,n}$ in L.

A. Herzer, Wiesbaden

LITERATUR

[1] W. Blaschke, *Projektive Geometrie* (Wolfenbüttel 1947).

[2] W. Burau, *Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie* (Berlin 1961).

[3] A. Heyting, *Axiomatic Projective Geometrie* (Groningen-Amsterdam 1963).