

Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **27 (1972)**

Heft 1

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Aufgaben

Problem 629 A. Für ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c und dem Flächeninhalt F gilt $F \leq (\sqrt{3}/4) (abc)^{2/3}$. Wir vermuten, dass allgemein für das Hypervolumen V eines n -dimensionalen Simplexes $A_1 A_2 \dots A_{n+1} \subset R^n$ gilt $V \leq (1/n!) \sqrt{(n+1)/2^n} \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} a_{ij} \right)^{2/(n+1)}$, wobei a_{ij} die Länge der die Eckpunkte A_i, A_j verbindenden Kante ist.

D. Veljan, Zagreb

Beweis der Vermutung (induktiv nach der Dimensionszahl): Die ausgesprochene Vermutung trifft für das Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c , dem Flächeninhalt F und den Innenwinkeln α, β, γ tatsächlich zu, wie sich aus den Beziehungen

$$F^3 = \frac{1}{8} a^2 b^2 c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \quad \text{und} \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \leq \frac{3}{8} \sqrt{3}$$

leicht ergibt. Die Gleichheit trifft genau für das gleichseitige Dreieck zu.

Für den Induktionsschritt stützen wir uns auf zwei bekannte Forschungsergebnisse. Wir bezeichnen das zu untersuchende n -Simplex mit S und die Hypervolumina seiner $(n-1)$ -dimensionalen Seitensimplices S_1, \dots, S_{n+1} mit V_1, \dots, V_{n+1} . Für jedes $i \in \{1, \dots, n+1\}$ sei e_i der zu S_i orthogonale nach aussen weisende Einheitsvektor. Für die konvexen Hüllen E_i der Vektormengen $\{0, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n+1}\}$ gilt dann

$$i, j \in \{1, \dots, n+1\}; \quad i \neq j \Rightarrow \text{int } E_i \cap \text{int } E_j = \emptyset, \quad (1)$$

wobei $\text{int } E_i$ die Menge der inneren Punkte von E_i bezeichnet. Steht W_i für das Hypervolumen von E_i , so gilt nach [1]:

$$i \in \{1, \dots, n+1\} \Rightarrow V = \frac{1}{n} [(n-1)! n! V_1 \dots V_{i-1} W_i V_{i+1} \dots V_{n+1}]^{1/(n-1)}. \quad (2)$$

Die Vereinigungsmenge E der Simplices E_1, \dots, E_{n+1} ist ein der Einheitskugel von R^n einbeschriebenes n -Simplex. Für das Hypervolumen W von E gilt daher nach [2], p. 291:

$$W \leq \frac{1}{n!} (n+1)^{(n+1)/2} n^{-n/2}, \quad (3)$$

mit Gleichheit genau für reguläres E . Aus (2) folgt die symmetrische Beziehung

$$V^{n+1} = n^{-n-1} [(n-1)!^{n+1} n!^{n+1} V_1^n \dots V_{n+1}^n W_1 \dots W_{n+1}]^{1/(n-1)}.$$

Wegen $W_1 \dots W_{n+1} \leq [(n+1)^{-1} (W_1 + \dots + W_{n+1})]^{n+1}$ und (1) ergibt sich $W_1 \dots W_{n+1} \leq (W/(n+1))^{n+1}$ und weiter nach (3)

$$V^{n+1} \leq n^{-n-1} [(n-1)!^{n+1} V_1^n \dots V_{n+1}^n (n+1)^{(n-1)(n+1)/2} n^{-n(n+1)/2}]^{1/(n-1)}.$$

Infolge der Induktionsannahme erhalten wir

$$V^{n+1} \leq n^{-n-1} [(n-1)!^{n+1-n(n+1)} (n+1)^{(n-1)(n+1)/2} \cdot 2^{-(n+1)n(n-1)/2} \cdot (\prod_{i,j} a_{ij}^2)^{n-1}]^{1/(n-1)} = n!^{-n-1} \left(\frac{n+1}{2^n}\right)^{(n+1)/2} \cdot \prod_{i,j} a_{ij}^2,$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Der Beweis zeigt auch, dass das Gleichheitszeichen genau für reguläre Simplexes zutrifft.

LITERATUR

[1] P. BARTOS, Sinusova veta o simplexoch v E_n . Casopis Pest. Mat. 93 (1968), 273–277.
 [2] L. FEJES TÓTH, Reguläre Figuren. Akadémiai kiadó, Budapest 1965.

G. Korchmáros, Budapest

Anmerkung der Redaktion: Für $n = 3$ vgl. Aufgabe 583 (El. Math. 24 (1969) 116–117).

Aufgabe 638. Let p be a fixed prime and a, b, s nonnegative integers such that $a + b < p^s$. Show that the binomial coefficients

$$\binom{p^s - a - 1}{b}, \quad \binom{p^s - b - 1}{a}$$

are divisible by exactly the same power of p . L. Carlitz, Duke University, USA

Solution: If $a = b$ there is nothing to be proved. Hence we may suppose $a > b$. Since

$$\binom{p^s - a - 1}{b} = \frac{(p^s - a - 1)!}{(p^s - a - b - 1)! b!}$$

and

$$\binom{p^s - b - 1}{a} = \frac{(p^s - b - 1)!}{(p^s - a - b - 1)! a!}$$

we see that it is sufficient and necessary to prove that the products $a(a-1) \dots (b+1)$ and $(p^s - b - 1)(p^s - b - 2) \dots (p^s - a)$ are divisible by exactly the same power of p which is trivial because of the fact that a contains as many factors p as $p^s - a$, $a - 1$ contains as many factors p as $p^s - a + 1$, etc.

O. P. Lossers, Eindhoven, Netherlands

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), C. Bindschedler (Küsnacht ZH), P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), H. Flanders (Tel Aviv), H. Harborth (Braunschweig), Edith V. Sloan (Greensboro, N.C., USA), W. R. Umbach (Rottorf, BRD) und R. W. van der Waall (Nijmegen, Niederlande).

Aufgabe 639. Es seien O_i die Mittelpunkte von vier Kreisen k_i ($i = 1, 2, 3, 4$), die einander in einem Punkte P schneiden. Es seien weiter die sechs übrigen verschiedenen Schnittpunkte der Kreise k_i mit A_{ij} bezeichnet (A_{ij} der Schnittpunkt der Kreise k_i, k_j). Es ist je eine die Mittelpunkte O_i betreffende notwendige und hinreichende Bedingung dafür zu finden, dass

- a) die Punkte A_{ij} die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits mit den Seiten a_i sind,
 b) die Seiten a_i des Vierseits ein Sehnenviereck bilden. J. Brejcha, Brno, CSSR

Lösung zu a): Gehen drei Kreise durch den Punkt P und sollen die anderen drei Schnittpunkte auf einer Geraden liegen, so müssen auch die drei Fusspunkte der Lote von P auf die Seiten des Mittelpunktdreiecks auf einer Geraden liegen. Dies ist nach dem Satz von Wallace genau dann der Fall, wenn P auf der Umkreislinie des Dreiecks der Mittelpunkte liegt. Es folgt nun leicht, dass die Zugehörigkeit von P, O_1, O_2, O_3, O_4 zu einer und derselben Kreislinie eine Bedingung der gesuchten Art ist.

K. Schuler, Rottweil, BRD

2. *Lösung:* a) Durch Spiegelung (Inversion) an einem Kreis um P gehen die vier Kreise k_i in vier Geraden k'_i über, die einander in den sechs Punkten A'_{ij} , den Spiegelbildern von A_{ij} schneiden. Wenn jeweils drei Schnittpunkte A_{ij} auf einer Geraden (z. B. A_{23}, A_{24}, A_{34} aus a_1) liegen, dann liegen die gespiegelten Punkte A'_{ij} auf einem durch P gehenden Kreis. Die Umkreise der aus je drei Parabeltangenten gebildeten Dreiecke gehen bekanntlich durch den Parabelbrennpunkt P . Die Fusspunkte T'_i der vom Brennpunkt P auf die Tangenten k'_i der Parabel gefällten Lote liegen auf deren Scheiteltangente t' . Die den Punkten T'_i in der Inversion zugeordneten Punkte T_i liegen demnach auf einem durch P gehenden Kreis t . Da die Punkte T_i Gegenpunkte zu P auf den Kreisen k_i sind, liegen auch deren Mittelpunkte O_i auf einem durch P gehenden Kreis k . Damit ist gezeigt, dass die Kreise k_i nur dann die unter a) geforderte Eigenschaft besitzen, wenn die Kreismittelpunkte O_i auf einem durch P gehenden Kreis liegen.

b) Damit die Geraden a_i ein Sehnenviereck bilden, müssen vier von den sechs Punkten A_{ij} und ebenso die ihnen in der Inversion zugeordneten vier Punkte A'_{ij} jeweils auf einem Kreis liegen. Demnach müssen auch die Geraden k'_i ein Sehnenviereck bilden. Dies bedeutet, dass zwei Vierecksseiten k'_i einander unter denselben Winkeln schneiden wie die beiden übrigen Vierecksseiten k'_i . Demnach schliessen auch die von P auf die ersten beiden Geraden k'_i gefällten Lote denselben Winkel ein wie die von P auf die beiden übrigen Geraden k'_i gefällten Lote. Auf dem Kreis t begrenzen somit zwei Punkte T_i und die anderen beiden Punkte T_i gleichlange Bogenstücke. Entsprechend begrenzen auch auf dem Kreis k zwei Punkte O_i und die beiden anderen Punkte O_i gleichlange Bogenstücke. Es ergibt sich somit als notwendige und hinreichende Bedingung für die Eigenschaft b), dass mindestens eine Nebenecke des Sehnenvierecks $O_1O_2O_3O_4$ ein Fernpunkt ist. K. Grün, Linz, Donau, Österreich

Aufgabe 640. Am ebenen Dreieck mit Seiten $a \leq b \leq c$ ($a + b + c = 2s$), Inradius r und Umradius R zeige man

$$4Rr - r^2 \geq \left(\frac{s}{2}\right)^2 \text{ ist äquivalent mit } b + c \leq 3a, \quad (1)$$

$$2 R r - r^2 \stackrel{\geq}{\leq} \left(\frac{s}{3}\right)^2 \text{ ist äquivalent mit } c + a \stackrel{\geq}{\leq} 2 b . \quad (2)$$

I. Paasche, München

Lösung: Mit den Beziehungen

$$2 s = a + b + c ,$$

$$R r = abc/4 s \quad \text{und}$$

$$r^2 = (s - a) (s - b) (s - c)/s$$

erhält man

$$\begin{aligned} 2 R r - r^2 - \frac{s^2}{9} &= \frac{1}{72 s} \{36 abc - 9 (-a + b + c) (a - b + c) (a + b - c) \\ &\quad - (a + b + c)^3\} \\ &= -\frac{4}{72 s} (-2 a + b + c) (a - 2 b + c) (a + b - 2 c) . \end{aligned}$$

Wegen $a \leq b \leq c$ ist auf der rechten Seite die erste Klammer nichtnegativ und die dritte nichtpositiv; jede dieser beiden Klammern verschwindet genau im Falle $a = b = c$. Nun lässt sich die zweite Behauptung direkt aus der vorigen Formel ablesen. Mit einer analogen Faktorisierung kann die erste Behauptung bewiesen werden.

P. Nüesch, Lausanne

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), L. Carlitz (Durham, N.C., USA), O. Reutter (Ochsenhausen, BRD), K. Schuler (Rottweil, BRD) und H. Wimmer (Graz, Österreich).

Aufgabe 641. Gesucht wird ein Beweis der folgenden einfachen Aussage kombinatorisch-geometrischer Art: Es seien n und i ($1 \leq i \leq n$) natürliche Zahlen, und K bezeichne eine Menge von n abgeschlossenen, nicht notwendig disjunkten Strecken einer Geraden G . Die Menge derjenigen Punkte von G , die wenigstens i verschiedenen Strecken von K angehören, zerfällt in endlich viele paarweise disjunkte und abgeschlossene Strecken; ihre Anzahl sei k_i ($1 \leq k_i \leq n$). Es gilt dann die additive Formel

$$n = \sum_{i=1}^n k_i .$$

H. Hadwiger, Bern

1. *Lösung:* Statt K , k_i schreiben wir K_n , $k_{i,n}$. Für $n = 1$ ist wegen $i = 1$ und $k_{1,1} = 1$ die Behauptung leicht einzusehen. Nun werde $n > 1$ vorausgesetzt.

Seien s_m ($1 \leq m < n$) abgeschlossene Strecken auf G und $K_{n-1} = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$. Für $i = 1, \dots, n - 1$ seien $S_{i,t}^{(n-1)}$ ($1 \leq t \leq k_{i,n-1}$) die paarweise disjunkten und abgeschlossenen Strecken, in die die Menge derjenigen Punkte von G zerfällt, die wenigstens i Strecken von K_{n-1} angehören.

Nun geben wir uns $K_n = K_{n-1} \cup \{s_n\}$ vor. Die Menge der Punkte von G , die sowohl s_n als auch einer der Strecken $S_{i,t}^{(n-1)}$ ($1 \leq t \leq k_{i,n-1}$) angehören, zerfalle

genau in $j_{i,n-1}$ (paarweise disjunkte und abgeschlossene) Strecken. Wir behaupten nun

$$k_{i,n} = \left\{ \begin{array}{ll} k_{1,n-1} - j_{1,n-1} + 1 & \text{für } i = 1, \\ k_{i,n-1} - j_{i,n-1} + j_{i-1,n-1} & \text{für } 1 < i < n, \\ j_{n-1,n-1} & \text{für } i = n. \end{array} \right\} \quad (*)$$

Die erste Zeile ist klar, da die Menge der Punkte von G , die einer Strecke von K_n angehören, sich zusammensetzt aus der Menge der Punkte von G , die entweder einem s_ν ($1 \leq \nu < n$) mit $s_\nu \cap s_n = \emptyset$ (dies liefert den Beitrag $k_{1,n-1} - j_{1,n-1}$) oder einem s_ν ($1 \leq \nu < n$) mit $s_\nu \cap s_n \neq \emptyset$ oder s_n angehören. Ist $n \geq 3$ und $1 < i < n$, so ist die zweite Zeile von (*) richtig, da die Menge der Punkte von G , die i Strecken von K_n angehören, sich zusammensetzt aus der Menge der Punkte von G , die entweder i Strecken von K_{n-1} , nicht jedoch s_n (Beitrag $k_{i,n-1} - j_{i,n-1}$) oder $i - 1$ Strecken von K_{n-1} und s_n angehören (Beitrag $j_{i-1,n-1}$). Schliesslich ist die letzte Zeile von (*) klar, da die Menge der Punkte von G , die sämtlichen n Strecken von K_n angehören, gleich ist der Menge der Punkte von s_n , die einer der Strecken $S_{n-1,t}^{(n-1)}$ ($1 \leq t \leq k_{n-1,n-1}$) angehören. Aus (*) folgt

$$\sum_{i=1}^n k_{i,n} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} k_{i,n-1},$$

woraus sich die behauptete additive Formel durch Induktion ergibt.

P. Bundschuh, Freiburg i. Br.

2. Lösung (des Aufgabenstellers): G sei die x -Achse, und x bezeichne zugleich einen Punkt von G und dessen Koordinate. J_1, \dots, J_n seien die Intervalle aus K , f_j die charakteristische Funktion von J_j ($j = 1, \dots, n$); $F(x) := \sum_{j=1}^n f_j(x)$, $g_i(x) := 1$ bzw. 0 , falls $F(x) \geq i$ bzw. $< i$. Dann ergibt sich

$$x \in G \Rightarrow F(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x). \quad (1)$$

Bezeichnet $f(x+)$ den rechtsseitigen Grenzwert von f an der Stelle x , so gilt weiter $\sum_{x \in G} [f_j(x) - f_j(x+)] = 1$ ($j = 1, \dots, n$), also

$$\sum_{x \in G} [F(x) - F(x+)] = n; \quad \sum_{x \in G} [g_i(x) - g_i(x+)] = k_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt nun die Behauptung.

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), H. Flanders (Tel Aviv), H. Harborth (Braunschweig), P. Hohler (Olten) und I. Paasche (München).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. September 1972**, wenn möglich in Maschinschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ...A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, p. 67), Problem 625B (Band 25, p. 68), Problem 645A (Band 26, p. 46).

Aufgabe 662. Die untenstehenden Figuren stellen ein 8×4 Boss Puzzle dar, wobei die 31 Zahlentäfelchen einmal in natürlicher, einmal in umgekehrter Anordnung stehen. Es seien m, n natürliche Zahlen ≥ 2 . Man zeige, dass beim $m \times n$ Boss Puzzle die natürliche Anordnung durch Verschieben von Zahlentäfelchen genau dann in die umgekehrte Anordnung übergeführt werden kann, wenn gilt: $mn \equiv 1$ oder $mn \equiv 2 \pmod{4}$.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	

31	30	29	28
27	26	25	24
23	22	21	20
19	18	17	16
15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	

A. Herzer, Wiesbaden

Aufgabe 663. Let P be a point in the interior of the triangle ABC . Let R_1, R_2, R_3 denote the distances AP, BP, CP and let w_1, w_2, w_3 denote the bisectors of the angles BPC, CPA, APB . Show that

$$R_1 w_1^2 + R_2 w_2^2 + R_3 w_3^2 + 12 w_1 w_2 w_3 \leq \frac{9}{4} R_1 R_2 R_3,$$

with equality if and only if ABC is equilateral and P is the incenter.

L. Carlitz, Durham, N.C., USA

Aufgabe 664. Ein Quadrat ist in gleichschenklige spitzwinklige Dreiecke ohne gemeinsame innere Punkte zu zerlegen.

Anmerkung: Fordert man die Zerlegung eines Quadrates in spitzwinklige Dreiecke ohne gemeinsame innere Punkte, so ist dies mit acht Dreiecken möglich (vgl. z. B. C. S. Ogilvy, Mathematische Leckerbissen, Vieweg Braunschweig 1969, p. 41, 97). Die obige Aufgabe ist mit zehn Dreiecken lösbar; die Frage nach der Minimalzahl von Dreiecken ist dagegen noch offen.

E. Schröder, Dresden, DDR

Problem 664A. In einer Ebene sind n ($n \in \mathbb{N}$) kongruente abgeschlossene Kreisscheiben so gelagert, dass je zwei von ihnen höchstens einen Punkt gemeinsam haben. Vermutlich ist dann die maximal mögliche Anzahl der gemeinsamen Punkte (Berührungspunkte) der Kreisscheiben bei einer derartigen Lagerung $[3n - \sqrt{12n - 3}]$. Man beweise oder widerlege diese Vermutung.

Der Verfasser kennt keinen Beweis dieser Vermutung.

O. Reutter, Ochsenhausen, BRD