

Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **27 (1972)**

Heft 4

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Kleine Mitteilungen

On Regular Right Duo Semigroups

Let S be a semigroup¹⁾. We shall say that S is *right duo* if every right ideal R of S is two-sided. Analogously can be defined the left duo semigroup. A semigroup is said to be a *duo* semigroup if it is both left and right duo. S is called *regular* if to every element a of S there exists an element x in S such that $a = a x a$. For example, the full transformation semigroup of a set of 2 elements is a regular right duo semigroup. Another example is given by the following multiplication table:

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	1	2	3
3	0	1	2	3

In this short note some ideal-theoretic characterizations of regular right (and left) duo semigroups will be proved.

Theorem 1. *A semigroup S is a regular right duo semigroup if and only if the condition*

$$B \cap R = RB \tag{1}$$

holds for every bi-ideal B of S and every right ideal R of S .

Proof. Let S be a regular right duo semigroup. Then every bi-ideal B of S can be represented in the form

$$B = IL, \tag{2}$$

where L is a left ideal and I is a two-sided ideal of S (cf. [3]). Therefore (1) is implied by (2) and the Kovács-Iséki regularity criterion (see [1], p. 34).

Conversely, suppose that S is a semigroup admitting property (1) for every bi-ideal B and every right ideal R of S . Then, for any right ideal R of S , (1) implies

$$R \cap S = SR. \tag{3}$$

Hence S is right duo. But a right duo semigroup S is regular if and only if $I \cap L = IL$ for every two-sided ideal I and every left ideal L of S , which is implied by (1).

The following criterion can similarly be proved.

Theorem 2. *A semigroup S is a regular right duo semigroup if and only if the relation*

$$Q \cap R = RQ \tag{4}$$

holds for every quasi-ideal Q and every right ideal R of S .

¹⁾ For the undefined notions and notations we refer to [1].

Next we give necessary and sufficient conditions for a right duo semigroup S to be a semilattice of groups.

Theorem 3. *For a right duo semigroup S the following conditions are pairwise equivalent:*

- (A) S is a semilattice of groups.
- (B) $B \cap I = BI$ for every bi-ideal B and every two-sided ideal I of S .
- (C) $I \cap Q = QI$ for any quasi-ideal Q and any two-sided ideal I of S .
- (D) $I \cap L = LI$ for every left ideal L and every two-sided ideal I of S .

Proof. (A) implies (B). It is known (cf. [2], [5]) that for any two bi-ideals B_1, B_2 of a semigroup S that is a semilattice of groups, the condition

$$B_1 \cap B_2 = B_1 B_2 \quad (5)$$

holds. This implies (B).

Evidently (B) implies (C) and (C) implies (D), because every left ideal is a quasi-ideal, and every quasi-ideal is a bi-ideal.

(D) implies (A). In case of $I = S$, (D) implies

$$L \cap S = LS \quad (6)$$

for every left ideal L of S , i.e. S is a left duo semigroup. Therefore condition (D) implies

$$L(a) \cap R(a) = R(a) L(a), \quad (7)$$

that is,

$$J(a) = J^2(a), \quad (8)$$

for every element a of S . (8) implies $a \in a^2 \cup a S a$ ($\forall a \in S$), whence S is regular. Thus S is a regular duo semigroup, that is a semilattice of groups (cf. [4], Theorem 2).

S. Lajos, Budapest, Hungary

REFERENCES

- [1] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, *The Algebraic Theory of Semigroups*, vol. I, 2nd edition, Amer. Math. Soc. (Providence, 1964).
- [2] S. LAJOS, *On Semilattices of Groups*, Proc. Japan Acad. **45**, 383 (1969).
- [3] S. LAJOS, *On (m, n) -Ideals in Regular Duo Semigroups*, Acta Sci. Math. **31**, 179 (1970).
- [4] S. LAJOS, *A Characterization of Regular Duo Semigroups*, Mat. Vesnik **7** (22), 401 (1970).
- [5] S. LAJOS, *On a Class of Inverse Semigroups*, Algebra Seminar Report, University of California, Davis, No. 3, 39–43 (1969).

A Contour for the Poisson Integral

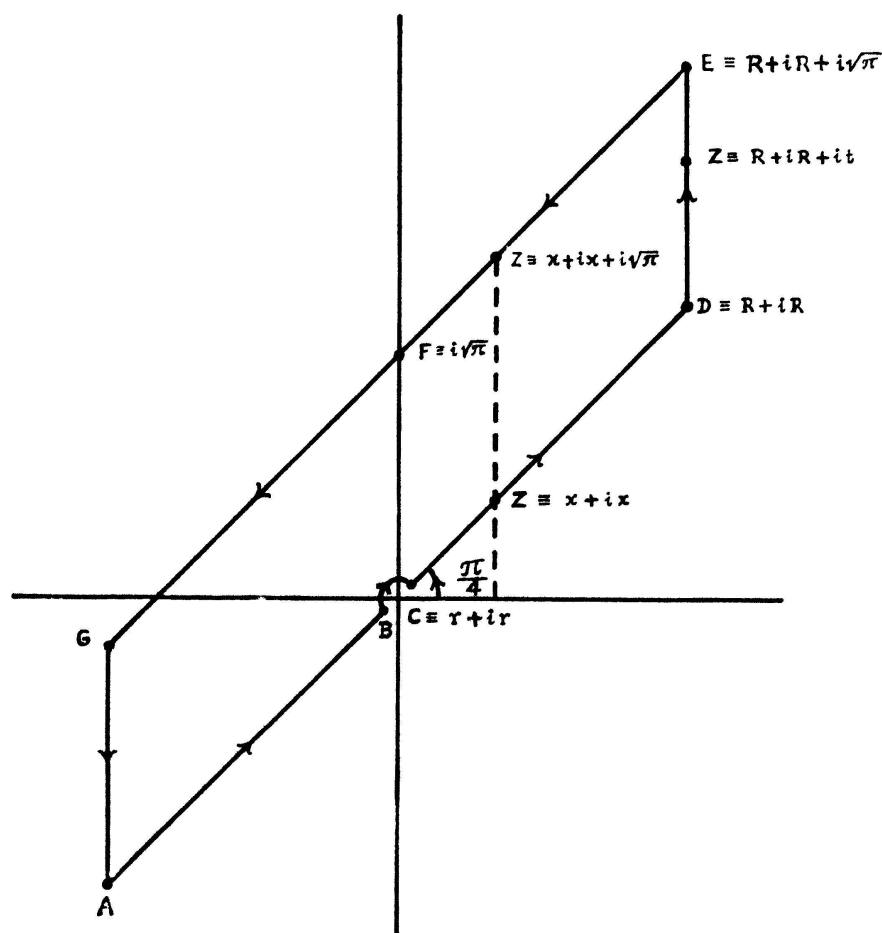
A convenient contour for the direct evaluation of the Poisson Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (1)$$

does not appear to have been considered in the literature. On the contrary (1) is invariably borrowed from real variable theory to derive Fresnel's integrals by integrating e^{iz^2} (or e^{-z^2}) along a sector. The Fresnel integrals, however, may be obtained independently by the procedure for evaluating Gauss's sums [2] suggesting that a suitable modification of this procedure should also yield (1). In fact, we integrate

$$f(z) = \frac{e^{\frac{iz^2}{2}}}{e^{-\sqrt{\pi}z} - 1} \quad (2)$$

along the parallelogram $\widehat{ABCDEF GA}$ as shown in the diagram.



We have

$$\left| \int_{DE} f(z) dz \right| \leq \frac{e^{-R^2}}{1 - e^{-\sqrt{\pi}R}} \int_0^{\sqrt{\pi}} e^{-Rt} dt = \frac{e^{-R^2}}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty). \quad (3)$$

Similarly, $\int_{GA} f(z) dz$ also vanishes as $R \rightarrow \infty$. Now,

$$\int_{CD} f(z) dz = (1+i) \int_r^R \frac{e^{-x^2}}{e^{-(1+i)\sqrt{\pi}x} - 1} dx$$

and

$$\int_{AB} f(z) dz = (1+i) \int_{-R}^{-r} \frac{e^{-x^2}}{e^{-(1+i)\sqrt{\pi}x} - 1} dx = (1+i) \int_r^R \frac{e^{-x^2}}{e^{(1+i)\sqrt{\pi}x} - 1} dx$$

giving

$$\int_{AB} f(z) dz + \int_{CD} f(z) dz = -(1+i) \int_r^R e^{-x^2} dx. \quad (4)$$

Likewise, we have

$$\int_{GF} f(z) dz + \int_{FE} f(z) dz = i(1+i) \int_0^R e^{-x^2} dx. \quad (5)$$

Equating the integrals along AD and GE in the limit as $r \rightarrow 0$ and $R \rightarrow \infty$ and taking into account the contribution $i\sqrt{\pi}$ from the indentation at the origin, we obtain, from (4) and (5),

$$-(1+i) \int_0^\infty e^{-x^2} dx + i\sqrt{\pi} = i(1+i) \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

yielding (1).

More generally, by integrating

$$f(z) = \frac{e^{iz^2 \cos^2 \alpha}}{e^{-\sqrt{2\pi} z \cos \alpha} - 1} \quad (6)$$

along a parallelogram inclined at α to the real axis, $0 \leq \alpha < \pi/2$ so that

$$D \equiv R + iR \tan \alpha, \quad E \equiv R + iR \tan \alpha + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sec \alpha, \quad F \equiv i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sec \alpha$$

we obtain, in exactly the same manner and with no more effort,

$$\int_0^\infty e^{-x^2 \sin 2\alpha + ix^2 \cos 2\alpha} dx = \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-i\alpha}, \quad 0 \leq \alpha < \pi/2, \quad (7)$$

which evidently includes the integrals of Fresnel ($\alpha = 0$) and Poisson ($\alpha = \pi/4$) as special cases. Here again, the usual proof [1] of the generalisation (7) depends on an appeal to (1).

Changing the variable from x to ϱx where $\varrho > 0$ is arbitrary and setting $a = \varrho^2 e^{2i\alpha}$ (7) assumes the more compact form

$$\int_0^\infty e^{iax^2} dx = -\frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2a}}, \quad a \neq 0, \operatorname{Im} a \geq 0, \quad (8)$$

the principal value of $\sqrt{a}$ being taken on the right.

K. N. Srinivasa Rao, University of Mysore, India

REFERENCES

- [1] E. T. COPSON, *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*, O.U.P. 1961, p. 143.
- [2] G. SANSONE, J. GERRETSEN, *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable* (P. Noordhoff, Groningen 1960), p. 139–141.

Aufgaben

Aufgabe 647. Für eine streng monoton wachsende Folge (a_i) natürlicher Zahlen seien $A(n) = \sum_{a_i \leq n} 1$ ($n = 1, 2, \dots$), $\limsup A(n)/n$ [$n \rightarrow \infty$] die *obere Dichte* und – im Falle der Existenz – $\lim A(n)/n$ [$n \rightarrow \infty$] die *Dichte*. Man beweise:

a) Jede streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen mit oberer Dichte 1 besitzt eine unendliche Teilfolge, welche aus paarweise teilerfremden Zahlen besteht.

b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es stets eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen mit Dichte $> 1 - \varepsilon$ derart, dass für keine ihrer unendlichen Teilfolgen die Glieder paarweise denselben grössten gemeinsamen Teiler haben.

P. Erdős, Budapest

Für die Lösung zu Teil a) vgl. diesen Band, p. 65.

Lösung zu Teil b): Zu jedem $\varepsilon > 0$ wollen wir eine streng monoton wachsende Folge (a_i) natürlicher Zahlen mit Dichte $> 1 - \varepsilon$ konstruieren derart, dass für jede natürliche Zahl d nur endlich viele verschiedene a_i paarweise den grössten gemeinsamen Teiler d haben.

Es sei $n_0 = n_0(\varepsilon)$ genügend gross. Eine natürliche Zahl a gehöre nun genau dann zur Folge (a_i) , wenn gilt:

- 1) Der kleinste Primfaktor von a ist $\leq n_0$, und
- 2) ist $p_k | a$ und p_k nicht der grösste Primfaktor von a , dann hat a im Intervall $(p_k, e^{n_0} p_k^2)$ einen Primfaktor.

Wäre $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots$ eine unendliche Teilfolge mit $(a_{i_{r_1}}, a_{i_{r_2}}) = d$ für $r_1 \neq r_2$, so würde gelten $a_{i_r} = ds_r$, $(s_{r_1}, s_{r_2}) = 1$. Also hätten die a_{i_r} beliebig grosse Primfaktoren, daher hätten unendlich viele unter ihnen einen Primfaktor im Intervall