Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **27 (1972)**

Heft 3

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Aufgaben

Aufgabe 646. Es seien n eine ungerade natürliche Zahl und $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossene, nichtleere paarweise disjunkte und streng-konvexe sphärische Bereiche auf der gewöhnlichen Kugelfläche S. Dabei heisst ein konvexer sphärischer Bereich $A \subset S$ streng-konvex, wenn der sphärische Durchmesser von A kleiner als π ausfällt. Man beweise, dass es zwei Grosskreise auf S derart gibt, dass einer von ihnen geradzahlig viele A_i und der andere ungeradzahlig viele A_i trifft.

H. Hadwiger, Bern

Lösung des Aufgabenstellers: Es bezeichne S die zweidimensionale euklidische Sphäre, es seien $A_i \subset S$ $(i = 1, \ldots, n)$ abgeschlossenene, streng-konvexe sphärische Bereiche, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, und es sei n ungerade. Für Punktmengen $X \subset S$ führen wir die Hilfsfunktion $e(X) = 0$ bzw. $e(X) = 1$ $(X = \emptyset$ bzw. $X \neq \emptyset)$ ein und bezeichnen mit X^* die zu X auf S antipodisch liegende Menge. Ferner bedeute $S - X$ die zu X komplementäre Menge. Es sei weiter $A = \bigcup_1^n A_i$ gesetzt. Es existiert dann ein antipodisches Punktepaar $p, p^* \in S$ derart, dass entweder (Fall a) $p, p^* \in A$ oder (Fall b) $p, p^* \in S - A$ gilt. Andernfalls müsste $A \cup A^* = S$ und zugleich $A \cap A^* = \emptyset$ sein, was wegen des Zusammenhangs von S nicht angeht. – Es sei nun K ein fest gewählter Grosskreis durch p und p^*. Ist φ ein Winkel des Intervalls $0 \leq \varphi < \pi$, so soll K_φ den Grosskreis bezeichnen, der aus K durch eine Drehung um die Achse p, p^* um den Winkel φ in einem festgelegten positiven Sinn hervorgeht. Die Anzahl $N(\varphi)$ der vom Grosskreis K_φ des beschriebenen Ebenenbüschels getroffenen Bereiche ist dann durch Ansatz

$$N(\varphi) = \sum_1^n e(K_\varphi \cap A_i) \tag{a}$$

gegeben. Die Gegenannahme zu unserer Behauptung lässt sich durch

$$N(\varphi) - N(\psi) = \text{gerade} \quad (0 \leq \varphi < \psi < \pi) \tag{b}$$

kennzeichnen. Führt man

$$D(\varphi) = \lim[N(\varphi) - N(\psi)] \quad (0 \leq \varphi < \psi < \pi\,, \quad \psi \to \varphi) \tag{c}$$

ein, so resultiert mit (b)

$$D(\varphi) = \text{gerade} \quad (0 \leq \varphi < \pi)\,. \tag{d}$$

Die Hilfsfunktion $D(\varphi)$ verschwindet fast identisch, d.h. sie nimmt nur für endlich viele Winkel einen von Null verschiedenen Wert an. Demzufolge lässt sich die über alle Winkel des Intervalls $0 \leq \varphi < \pi$ formal gebildete Summe

$$m = \sum_\varphi D(\varphi) \tag{e}$$

ansetzen. Im Hinblick auf (a) und (c) ergibt sich mit einfacher Vertauschung der Summationen

$$m = \sum_1^n m_i\,, \tag{f}$$

wobei die verwendeten Hilfszahlen durch

$$m_i = \sum_\varphi \lim\ [e(K_\varphi \cap A_i) - e(K_\psi \cap A_i)] \quad (0 \leq \varphi < \psi < \pi\,, \quad \psi \to \varphi) \tag{g}$$

gegeben sind. Wie direkt ablesbar wird, ist $m_i = 0$, falls entweder $p \in A_i$ oder $p^* \in A_i$ (kann im Fall a zutreffen) gilt; ferner ist $m_i = 1$ in allen andern Fällen (trifft im Fall b immer zu). Nach (f) wird also $m = n - 2$ (Fall a) oder $m = n$ (Fall b) gelten. Dies ist aber ein Widerspruch, denn nach (d) und (e) muss m gerade sein, während n nach Voraussetzung ungerade ist. Die Gegenannahme ist also falsch und die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 647. Für eine streng monoton wachsende Folge (a_i) natürlicher Zahlen seien $A(n) = \sum_{a_i < n} 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\lim\sup A(n)/n$ $[n \to \infty]$ die *obere Dichte* und – im Falle der Existenz – $\lim A(n)/n$ $[n \to \infty]$ die *Dichte*. Man beweise:

a) Jede streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen mit oberer Dichte 1 besitzt eine unendliche Teilfolge, welche aus paarweise teilerfremden Zahlen besteht.

P. Erdös, Budapest

Lösung: Die Folge (a_i) habe die obere Dichte $\overline{D}(a_i) = 1$. Es sei $i_1 \in N$ beliebig. Die Folge (a_{i_n}) werde nun gebildet aus a_{i_1} und allen weiteren Elementen von (a_i), die zu a_{i_1} und untereinander teilerfremd sind. Nehmen wir an, die Folge (a_{i_n}) sei endlich, und p_r sei die grösste Primzahl, die in den Primfaktorzerlegungen der a_{i_n} auftritt. Die natürlichen Zahlen $\neq 1$, welche durch keine der Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ teilbar sind, bilden eine Folge $(\bar{a}_k)$ mit der Dichte $D(\bar{a}_k) = (1 - p_1^{-1}) \cdot \ldots \cdot (1 - p_r^{-1})$. Keine der Zahlen $\bar{a}_k$ kann zu (a_i) gehören, da sie dann auch zu (a_{i_n}) gehören müsste, was aber wegen $p_i \nmid \bar{a}_k$ $(i = 1, \ldots, r)$ unmöglich ist. Somit gilt $\overline{D}(a_i) + D(\bar{a}_k) \leq 1$, und wegen $D(\bar{a}_k) > 0$ ergibt sich ein Widerspruch zur Voraussetzung $\overline{D}(a_i) = 1$.

J. Fehér, Pécs, Ungarn

Anmerkung der Redaktion: Eine Lösung zu Teil b) erscheint später.

Aufgabe 648. Es seien a, b, c, k natürliche Zahlen und $S_c(k) = 1^c + 2^c + \cdots + k^c$. Für $c = 0$ definieren wir ergänzend $S_0(a + a\,b) = a + a\,b$, $S_0(a) = a$, $S_0(b) = b + 1$. Man beweise

$$S_c(a + a\,b) = \sum_{\gamma=0}^{c} a^\gamma \binom{c}{\gamma} S_{c-\gamma}(a)\; S_\gamma(b)\,.$$

I. Paasche, München

Lösung: Anwendung des binomischen Lehrsatzes und Ausklammern ergeben

$$\begin{aligned} S_c(a\,b + a) &= \sum_{\nu=0}^{b} \sum_{\mu=1}^{a} (\nu\,a + \mu)^c = \sum_{\nu=0}^{b} \sum_{\mu=1}^{a} \sum_{\gamma=0}^{c} \binom{c}{\gamma} (\nu\,a)^\gamma \mu^{c-\gamma} \\ &= \sum_{\gamma=0}^{c} \binom{c}{\gamma} a^\gamma \sum_{\mu=1}^{a} \mu^{c-\gamma} \sum_{\nu=0}^{b} \nu^\gamma \\ &= (b+1)\, S_c(a) + \sum_{\gamma=1}^{c} \binom{c}{\gamma} a^\gamma\, S_{c-\gamma}(a)\, S_\gamma(b)\,. \end{aligned}$$

Nur dank der ungewohnten Nullkonvention $S_0(b) = b + 1$ entsteht daraus die gewünschte Formel.

J. Binz, Bern

Weitere Lösungen sandten H. J. Adèr (Amsterdam), C. Bindschedler (Küsnacht, ZH), L. Carlitz (Durham, N. C., USA), J. Fehér (Pécs, Ungarn), F. Götze (Jena, DDR) und H. Harborth (Braunschweig, BRD).

Anmerkung der Redaktion: Verschiedene Einsender umgehen die vom Aufgabensteller voll beabsichtigte Nichteindeutigkeit der Definition von S_0 durch Wahl verschiedener Bezeichnungen. Mit $S_n(k) := 1^n + \ldots + k^n$, $S'_n(k) := 0^n + 1^n + \ldots + k^n$, $T_n(k) := 0^n - 1^n + \ldots + (-1)^k k^n$ erzielt L. Carlitz die folgenden weiteren Beziehungen:

$$S'_n(a\,b-1) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j S'_{n-j}(a-1)\, S'_j(b-1)\,,$$

$$T_n(a\,b-1) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j T_{n-j}(a-1)\, T_j(b-1) \quad \text{[a ungerade].}$$

$$T_n(a\,b-1) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j T_{n-j}(a-1)\, S'_j(b-1) \quad \text{[a gerade]}\,.$$

Aufgabe 649. a) Durch jeden Punkt in der Ebene eines Dreiecks gehen zwei Parabeln, die die Seiten des Dreiecks berühren. Man zeige: Der geometrische Ort des Punktes, in welchem sich diese beiden Parabeln unter rechtem Winkel schneiden, ist der Umkreis des Dreiecks.

b) Jede Gerade in der Ebene eines Kegelschnittbüschels mit den Grundpunkten A, B, C, D wird von zwei Büschelkegelschnitten berührt. Man zeige: Die Enveloppe der Geraden, für welche die beiden Berührungspunkte von A aus unter rechtem Winkel erscheinen, ist der Kegelschnitt, der die Seiten des Dreiecks BCD berührt und für welchen A ein Brennpunkt ist. C. Bindschedler, Küsnacht/ZH

Lösung: a) Die Ferngerade a und die Seiten b, c, d des gegebenen Dreiecks bestimmen die Schar der sie berührenden Parabeln, zu denen auch die in die Punktepaare $B = cd$, $B' = ab$ und $C = bd$, $C' = ac$ sowie $D = bc$, $D' = ad$ ausgearteten Kegelschnitte gehören. Die von einem beliebigen Punkt T_i der Ebene an diese Parabeln gelegten Tangenten bilden eine Strahlinvolution, deren Doppelstrahlen die durch T_i gehenden Parabeln berühren. In jenen Punkten T_i, in welchen die Doppelstrahlen aufeinander senkrecht stehen, entsteht eine symmetrische Strahlinvolution. Bei dieser ist somit $\sphericalangle\, BT_i\,C = \sphericalangle\, C'\,T_i\,B' = \sphericalangle\, BDC =$ konst. Die Strahlbüschel BT_i und CT_i sind also gleichsinnig kongruent; ihr Erzeugnis ist demnach der Kreis durch die Dreiecksecken B, C und D.

b) Das von den Grundpunkten A, B, C, D aufgespannte Kegelschnittsbüschel schneidet jede Gerade der Ebene in einer Punktinvolution, in deren Doppelpunkten die Büschelkegelschnitte die Gerade tangieren. Es sollen Geraden ermittelt werden, die das Kegelschnittsbüschel nach einer Punktinvolution schneiden, die bei Projektion aus A eine Strahlinvolution mit normal aufeinanderstehenden Doppelstrahlen, also eine symmetrische Strahlinvolution ergibt.

Die Gerade t_i schneide die beiden in die Geradenpaare $b = AB$, $b' = CD$ und $c = AC$, $c' = BD$ ausgearteten Kegelschnitte des Büschels in vier Punkten, unter anderen in $B_i = b'\,t_i$ und $C_i = c'\,t_i$, die aus A durch die Strahlenpaare b, $b_i = AB_i$

und c, $c_i = AC_i$ der symmetrischen Strahlinvolution projiziert werden. Hierbei gilt $\sphericalangle\, b_i c_i = \sphericalangle\, cb =$ konst. Die gleichsinnig kongruenten in A vereinigten Strahlbüschel b_i und c_i schneiden b' bzw. c' nach projektiven Punktreihen, deren Erzeugnis $t_i = B_i C_i$ somit ein Kegelschnitt ist, der b' und c' sowie die Gerade BC berührt. Die durch A gehenden Tangenten dieses Kegelschnittes sind als die Doppelstrahlen der gleichsinnig kongruenten Strahlbüschel b_i und c_i das durch A gehende isotrope Geradenpaar; A muss somit ein Brennpunkt dieses Kegelschnittes sein.

K. Grün, Linz, Donau, Österreich

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. Januar 1973**, wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Aufgabe 669. Es bedeute W einen Einheitswürfel der Kantenlänge 1 im n-dimensionalen euklidischen Raum R mit dem Ursprung $0 \in R$ als Mittelpunkt. Der Einheitsvektor u kennzeichne eine Richtung in R. Das planare statische Moment von W bezüglich der durch den Ursprung 0 gehenden zu u orthogonalen Ebene $\langle x, u\rangle = 0$ kann durch das sich über W erstreckende Integral

$$T_u = \int^{W} |\langle x, u\rangle|\, dx$$

dargestellt werden, wobei x den Ortsvektor eines in W variablen Punktes x und dx das Volumdifferential an der Stelle x anzeigen. Wie weiter oben soll die Eckklammer die Bildung des skalaren Produkts vorschreiben. – Es ist nachzuweisen, dass für alle $n \geq 1$ und alle Richtungen u die Ungleichung

$$T_u \leq \frac{1}{4}$$

gilt. Wie unmittelbar ersichtlich, gilt Gleichheit für jede der $2n$ Kantenrichtungen von W.

H. Hadwiger, Bern

Aufgabe 670. N bzw. P bezeichne die Menge aller natürlichen Zahlen bzw. aller Primzahlen. Für $k, m \in N$ werde $\sigma_k(m)$ definiert durch

$$\sigma_k(m) = \sum_{d \in N,\, d|m} d^k .$$

Für jede Teilmenge M von N werde $S_k(M)$ definiert durch

$$S_k(M) = \sum_{m \in M} \frac{\sigma_k(m)}{m!} .$$

Man beweise: Ist M eine unendliche (bzw. endliche) Teilmenge von P, so ist $S_k(M)$ irrational (bzw. rational) für alle $k \in N$.

Anmerkung: Die Irrationalität von $S_k(N)$ ist für $k = 1$ und $k = 2$ bekannt (Problem 4493, Amer. Math. Monthly 60 (1953) 557-558; Problem 4518, Amer. Math. Monthly 61 (1954) 264–265). Für $k \geq 3$ ist dies eine noch unbewiesene Vermutung von P. Erdös.

P. Bundschuh, Freiburg i. Br., BRD

Aufgabe 671. Man zeige, dass in jedem Dreieck für die Innenwinkel α, β, γ gilt:

$$2\,(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) + \left(\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\gamma}{2}\right) \geq 4$$

mit Gleichheit genau im gleichseitigen Fall.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Aufgabe 672. Man zeige, dass in jedem Dreieck für die Innenwinkel α, β, γ gilt:

$$\sin^3\alpha + \sin^3\beta + \sin^3\gamma \leq (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \cdot \left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)$$

mit Gleichheit genau im gleichseitigen Fall.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Problem 672 A. Bekanntlich ist $1/2 + \ldots + 1/n$ für keine natürliche Zahl $n \geq 2$ ganzzahlig. Ich vermute, dass für $n \geq 5$ und jede ganze Zahl N gilt: $|\,1/2 + \ldots + 1/n - N\,| > 1/[2, \ldots, n]$.

P. Erdös, Budapest

Literaturüberschau

Combinatorial Group Theory. Von Wilhelm Magnus, Abraham Karrass und Donald Solitar. Interscience tracts in pure and applied mathematics, Vol. 13. 444 Seiten. Interscience Publishers, New York, London, Sydney 1966.

On trouve dans cet important ouvrage – dont le principal auteur Wilhelm Magnus est l'auteur du remarquable article sur la Théorie des groupes publié dans la seconde édition de l'Encyclopédie allemande des sciences mathématiques – un exposé des parties de la théorie des groupes dans lesquelles ceux-ci sont définis par des ensembles de générateurs et de relations caractéristiques. L'ouvrage est d'un niveau élevé et requiert chez le lecteur la connaissance des éléments de la théorie des groupes et de l'algèbre linéaire. Le livre se compose de six chapitres dont les cinq premiers comprennent de nombreux problèmes. Des résultats intéressants font souvent l'objet de ces exercices dont les plus difficiles comportent des indications quant à leur solution. La plupart des résultats énoncés dans ces cinq premiers chapitres sont démontrés rigoureusement. Certains résultats dont les démonstrations originales sont trop longues pour être reproduites intégralement sont cités sans démonstration avec indication du nom de leur auteur et le renvoi à des références. Le sixième et dernier chapitre est consacré à quelques développements récents. L'ouvrage est muni d'une copieuse bibliographie et d'un index.

Ce volume est dédié à la mémoire de Max Dehn (1878–1952) qui, avec d'autres topologistes, a contribué au développement des matières exposées dans ce livre.

Le premier chapitre expose les concepts de base concernant les groupes et leurs graphes. Le second chapitre parle des groupe quotients et des sous-groupes d'un groupe défini par des générateurs et des relations caractéristiques. Le chapitre 3 traite les transformations de Nielsen. Le quatrième chapitre a pour objet les produits libres et les produits libres avec amalgamations. Le cinquième chapitre est intitulé Calcul des commutations (en anglais: «Commutator calculus»). Il s'agit du calcul dont l'opération de base consiste à former le commutateur de tout couple ordonné d'éléments d'un groupe donné, opération appelée commutation. On trouve dans ce livre une foule d'idées nouvelles et il passionnera les chercheurs.

S. Piccard