Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **26 (1971)**

Heft 6

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Kleine Mitteilungen

Kürzeste Verbindungsstrecken vorgeschriebener Steigung zwischen zwei windschiefen Geraden

1. Zwischen zwei windschiefen Geraden a und b können ∞^2 *Verbindungsstrecken* AB ($A \in a$, $B \in b$) eingeschaltet werden. Die Ermittlung einer Verbindungsstrecke mit vorgeschriebener *Richtung* ist eine elementare Lagenaufgabe mit eindeutiger Lösung, auf die sich auch die Aufgabe zurückführen lässt, solche Verbindungsstrecken zu finden, die mit a und b vorgeschriebene *Winkel* α bzw. β bilden ([1], S. 96 und [3], S. 38). Hierunter fällt im besonderen für $\alpha = \beta = \pi/2$ die Bestimmung der vom Gemeinlot gebildeten Verbindungsstrecke *kürzester Länge* $\overline{a\,b}$ ([1], S. 41 und 62ff.). Wird die Länge der Verbindungsstrecke, also die *Länge* $\overline{AB} = c > \overline{a\,b}$ vorgeschrieben, so ergeben sich ∞^1 Lösungen, die durch eine Ellipsographenbewegung der Strecke c hervorgehen und deren Trägergeraden eine Regelfläche 4. Grades (VII. Art nach Sturm) erfüllen, die von Burmester den Namen «Wringfläche» erhalten hat ([2], S. 281ff.). Wird hingegen der *Neigungswinkel* γ der Verbindungsstrecke gegen eine feste Ebene π vorgeschrieben, die ohne Einschränkung der Allgemeinheit als horizontal angenommen werden kann, so ergeben sich ebenfalls ∞^1 Lösungen, deren Trägergeraden im allgemeinen wieder eine Regelfläche 4. Grades (VII. Art) bilden; diese kann sich jedoch auf eine kubische Regelfläche oder auf ein einschaliges Drehhyperboloid reduzieren, falls eine der Geraden a, b bzw. beide selbst die Neigung γ aufweisen.

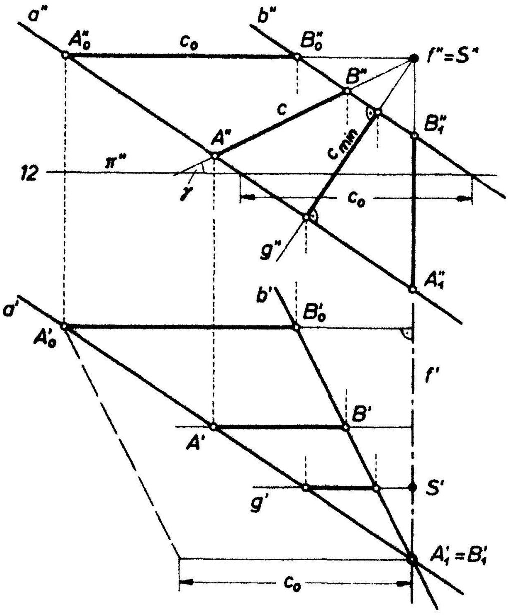
Das Problem, unter den ∞^1 Verbindungsstrecken mit vorgeschriebener Steigung γ die *kürzeste* zu finden, wird in amerikanischen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie gelegentlich behandelt ([1], S. 66), scheint jedoch in das europäische Schrifttum noch keinen Eingang gefunden zu haben. Eine elementare Lösung, die auch zu einer neuartigen Konstruktion des Gemeinlotes führt, soll anschliessend dargelegt werden. Weitere einschlägige Fragen hat der Verfasser in [3] erörtert.

2. Denken wir uns zu den beiden gegebenen Geraden a und b parallele Strahlen durch einen beliebigen Hilfspunkt gelegt, dann spannen diese eine Ebene ε auf. Führen wir sodann den Normalriss auf eine zu ε normale Bildebene ein, dann erscheinen in diesem «Seitenriss» die beiden Geraden a und b parallel. Wir dürfen demnach von vornherein voraussetzen, dass die Aufrisse a'' und b'' parallel sind (Figur).

Wir suchen zunächst die *kürzeste waagrechte Verbindungsstrecke* A_0B_0 zwischen a und b auf ($\gamma = 0$): Ihre Aufrisslänge ist mit der von a'' und b'' auf der Rissachse 12 ausgeschnittenen Strecke c_0 von vornherein bekannt, und ihre wahre Länge kann nicht kleiner sein als c_0; das Minimum wird also erreicht, wenn die Strecke A_0B_0 *parallel zur Rissachse* verläuft. Ihre gesuchte Position wird mithin gefunden, indem man im Grundriss die Strecke c_0 zwischen die Grundrissprojektionen a' und b' einpasst.

Anschliessend bestimmen wir die *lotrechte Verbindungsstrecke* A_1B_1 ($\gamma = \pi/2$): Sie bildet sich im Grundriss auf den Schnittpunkt von a' und b' ab.

Um nun die zu einem beliebigen, von 0 und $\pi/2$ verschiedenen Neigungswinkel γ gehörige kürzeste Verbindungsstrecke zwischen a und b zu ermitteln, betrachten wir den *Richtkegel*, der sich ergibt, wenn man durch einen festen Punkt alle Strahlen mit



Kürzeste Verbindungen mit verschiedenen Neigungen.

der vorgeschriebenen Neigung γ legt: Es handelt sich um einen Drehkegel mit lotrechter Achse und dem Öffnungswinkel $\pi - 2\gamma$. Seine für den Aufriss massgebenden *Umrisserzeugenden* geben die beiden möglichen *Richtungen* der gesuchten extremalen Verbindungsstrecken an. Für das Minimum ist jene Umrisserzeugende zu wählen, die im Aufriss nach der entgegengesetzten Seite geneigt ist als a'' und b''. Die kürzesten Verbindungsstrecken vorgeschriebener Steigung verlaufen also jedenfalls *parallel zur Aufrissebene.*

Zur Festlegung der Position von AB beachten wir die in der Zeichnung auftretenden *Teilverhältnisgleichheiten* (Figur). Aus $A_0' A' : A_1' A' = B_0' B' : B_1' B'$ im Grundriss folgt $A_0'' A'' : A_1'' A'' = B_0'' B'' : B_1'' B''$ im Aufriss. Dies bedeutet aber wegen der parallelen Lage von a'' und b'', dass die Geraden $A_0'' B_0''$, $A_1'' B_1''$ und $A'' B''$ einem *Strahlenbüschel* angehören. Die Trägergerade der Aufrißstrecke $A'' B''$ kann also unter der vorgeschriebenen Neigung γ direkt durch den Schnittpunkt f'' von $A_0'' B_0''$ und $A_1'' B_1''$ gezeichnet werden, und der zugehörige Grundriss $A' B'$ ist dann mittels der zur Rissachse 12 senkrechten Ordnerlinien hinzuzufügen. Die *Länge* c der Verbindungsstrecke AB ist im Aufriss, wo sie unverkürzt erscheint, unmittelbar abzulesen.

Die damit gelöste Titelaufgabe ist überall dort von Bedeutung, wo es auf die Optimierung der Lage einer Verbindung mit vorgeschriebener Steigung zwischen zwei windschiefen Geraden ankommt; beispielsweise bei Rohrleitungen, im Bergbau usw. Eine massgebende Rolle spielte die Aufgabe auch bei gewissen ebenen Verfolgungsproblemen, die Wunderlich mit Hilfe von räumlichen Fahrplandiagrammen behandelt hat [4].

3. Lässt man den Neigungswinkel γ variieren, so erkennt man aus der Figur, dass die Trägergeraden der zugehörigen Minimalabstände AB durchwegs jene feste *Leitgerade* f treffen, die sich im Aufriss auf den Punkt f'' abbildet. Diese Trägergeraden werden demnach von den Loten gebildet, die man aus den Punkten der gegebenen Geraden a (oder b) auf die Leitgerade f fällen kann. Sie erfüllen daher eine Erzeugendenschar eines *orthogonalen hyperbolischen Paraboloides.* Eine Scheitelerzeugende

desselben ist die Leitgerade f, die andere fällt mit dem Gemeinlot g von a, b und f zusammen. Ihr Schnittpunkt gibt den *Scheitel* S an.

Das *Gemeinlot* g von a und b kann im Aufriss als Normale aus f'' auf a'' und b'' sofort eingetragen werden, der Grundriss ist mittels Ordnern leicht hinzuzufügen. Damit ist eine einfache Konstruktion von g gewonnen, die keinen zusätzlichen Seitenriss erfordert.

A. J. Nechi, Atlanta, Ga., USA

LITERATUR

[1] H. E. Grant, *Practical Descriptive Geometry*, 2nd ed. (McGraw-Hill, New York 1965).
[2] E. Müller, J. Krames, *Vorlesungen über Darstellende Geometrie*, Bd. 3: *Konstruktive Behandlung der Regelflächen* (Deuticke, Leipzig, Wien 1931).
[3] A. J. Nechi, *Skew-Line Problems for Connectors of Given Length and Angle*, Engr. Des. Graph. J. *34*, 35–40 (1970).
[4] W. Wunderlich, *Über fünf Aufgaben der Seetaktik*, Z. math. naturw. Unterr. *72*, 97–102 (1941).

Eine mit Zirkel und Lineal nicht lösbare Kegelschnittaufgabe

Bei den Beispielen für Probleme, welche mit Zirkel und Lineal nicht lösbar sind, handelt es sich fast ausschliesslich um Dreiecksaufgaben, wenn man von den klassischen Problemen der Kreisteilung, der Würfelverdoppelung und der Winkeldreiteilung absieht. Mit der in [1] angegebenen elementaren Methode wurden Dreiecksaufgaben behandelt; hier soll diese Methode auf eine Kegelschnittaufgabe angewendet werden:

Gegeben sei ein Kegelschnitt $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ und ein Punkt $P_0(x_0, y_0)$; gesucht sei ein Kegelschnittpunkt $P_1(x_1, y_1)$, so dass der Abstand $\overline{P_0P_1}$ minimal ist. Wir werden zeigen: P_1 ist im allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal zu konstruieren[1]).

Die Strecke P_0P_1 muss notwendigerweise senkrecht zur Tangente

$$\alpha x_1 (x - x_1) + \beta y_1 (y - y_1) = 0$$

stehen, also parallel zum Normalvektor $(\alpha x_1, \beta y_1)$ sein, d.h. es gilt mit einem Proportionalitätsfaktor λ:

$$x_0 - x_1 = \lambda \alpha x_1 , \qquad y_0 - y_1 = \lambda \beta y_1 \tag{1}$$

neben der Kegelschnittgleichung

$$\alpha x_1^2 + \beta y_1^2 = 1 . \tag{2}$$

Wir lösen (1) auf:

$$x_1 = \frac{x_0}{1 + \lambda \alpha} , \qquad y_1 = \frac{y_0}{1 + \lambda \beta} \tag{1'}$$

1) Ersetzt man P_0 durch eine Gerade g_0, so ist der nächstgelegene Kegelschnittpunkt P_1 mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

und setzen (1') in (2) ein:

$$\frac{\alpha}{(1+\lambda\,\alpha)^2}\,x_0^2 + \frac{\beta}{(1+\lambda\,\beta)^2}\,y_0^2 = 1\,. \tag{3}$$

Das ist eine biquadratische Gleichung für λ. Da mit P_1 auch λ konstruierbar wäre, genügt es zu zeigen, dass (3) im allgemeinen keine konstruierbare Wurzel hat, und dazu genügt wiederum die Angabe eines speziellen Beispiels ohne konstruierbare Wurzel.

Wir wählen die gleichseitige Hyperbel $\alpha = 1$, $\beta = -1$ und den Punkt $P_0(1, 1)$. Damit wird (3)

$$\frac{1}{(1+\lambda)^2} - \frac{1}{(1-\lambda)^2} = 1$$

oder umgeformt

$$\lambda^4 - 2\,\lambda^2 + 4\,\lambda + 1 = 0\,.$$

Die biquadratische Gleichung, hier schon in reduzierter Form ohne kubisches Glied vorliegend, hat genau dann eine konstruierbare Wurzel, wenn das für ihre kubische Resolvente

$$z^3 - 4\,z^2 - 16 = 0$$

zutrifft [1]. Dann müsste aber ein ganzzahliger Teiler des absoluten Gliedes -16 Wurzel sein [1], was nicht zutrifft. Damit ist alles bewiesen.

D. Laugwitz, Darmstadt

LITERATUR

[1] D. Laugwitz, *Eine elementare Methode für Unmöglichkeitsbeweise bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.* El. Math. *17*, 54–58 (1962).

New Inversion Properties of μ and μ^*

Let $\mu(n)$ denote the Möbius function and $\mu^*(n)$ denote the unitary analogue of $\mu(n)$, which is defined by $\mu^*(n) = (-1)^{w(n)}$, where $w(n)$ is the number of distinct prime factors of n, $w(1) = 0$. Throughout the following $f(n)$ and $g(n)$ denote arithmetical functions. The object of this note is to prove the following new inversion formulae for $\mu(n)$ and $\mu^*(n)$:

Theorem 1.

$$g(n) = \sum_{d^k\delta = n} f(\delta) \iff f(n) = \sum_{d^k\delta = n} \mu(d)\,g(\delta)\,,$$

for every positive integer k.

Proof: Suppose $g(n) = \sum_{d^k\delta = n} f(\delta)$. Then

$$\sum_{d^k\delta = n} \mu(d)\,g(\delta) = \sum_{d^k\delta = n} \mu(d) \sum_{s^k t = \delta} f(t) = \sum_{d^k s^k t = n} \mu(d)\,f(t) = \sum_{t|n} f(t) \sum_{d|\sqrt[k]{n/t}} \mu(d) = f(n)\,,$$

since the inner sum is 1 or 0 according as $t = n$ or $t < n$. The converse can be proved in a similar way.

Theorem 2. If $F(x)$ and $G(x)$ are functions of a real variable $x \geqq 1$, then

$$G(x) = \sum_{n^k \leqslant x} F\left(\frac{x}{n^k}\right) \Leftrightarrow F(x) = \sum_{n^k \leqslant x} \mu(n)\, G\left(\frac{x}{n^k}\right),$$

for every positive integer k.

Proof: Suppose $G(x) = \sum_{n^k \leqslant x} F(x/n^k)$. Then

$$\sum_{n^k \leqslant x} \mu(n)\, G\left(\frac{x}{n^k}\right) = \sum_{n^k \leqslant x} \mu(n) \sum_{m^k \leqslant (x/n^k)} F\left(\frac{x}{m^k n^k}\right)$$

$$= \sum_{m^k n^k \leqslant x} \mu(n)\, F\left(\frac{x}{m^k n^k}\right) = \sum_{t^k \leqslant x} F\left(\frac{x}{t^k}\right) \sum_{n|t} \mu(n) = F(x).$$

The converse can be proved in a similar way.

Theorem 3. If $f(z)$ and $g(z)$ are functions of a complex variable z, then

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n^k z) \Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\, g(n^k z),$$

for every positive integer k.

Proof: Suppose $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n^k z)$. Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\, g(n^k z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \sum_{m=1}^{\infty} f(m^k n^k z) = \sum_{t=1}^{\infty} f(t^k z) \sum_{n|t} \mu(n) = f(z).$$

The converse can be proved in a similar way.

Theorem 4.

$$g(n) = \sum_{\substack{d^k \delta = n \\ (d, \delta) = 1}} f(\delta) \Leftrightarrow f(n) = \sum_{\substack{d^k \delta = n \\ (d, \delta) = 1}} \mu^*(d)\, g(\delta),$$

for every positive integer k.

Proof: Suppose $g(n) = \sum_{\substack{d^k \delta = n \\ (d, \delta) = 1}} f(\delta)$. Then

$$\sum_{\substack{d^k \delta = n \\ (d, \delta) = 1}} \mu^*(d)\, g(\delta) = \sum_{\substack{d^k \delta = n \\ (d, \delta) = 1}} \mu^*(d) \sum_{\substack{s^k t = \delta \\ (s, t) = 1}} f(t) = \sum_{\substack{d^k s^k t = n \\ (d, st) = 1 \\ (s, t) = 1}} \mu^*(d)\, f(t) = \sum_{t|n} f(t) \sum_{\substack{ds = \sqrt[k]{n/t} \\ (d, s) = 1}} \mu^*(d) = f(n),$$

since the inner sum is 1 or 0 according as $t = n$ or $t < n$ (cf. [1], corollary 2.1.2).

The converse can be proved in a similar way.

Remark 1. In case $k = 1$, theorems 1, 2 and 3 reduce to the familiar inversion formulae (cf. [2], theorems 266–270) and theorem 4 reduces to the inversion formula for $\mu^*(n)$ established by Cohen (cf. [1], theorem 2.3).

Remark 2. Theorems 1 and 4 hold good for functions f and g defined over generalised integers $\{l_n\}$. In case $k = 1$, these theorems reduce to theorems established by Horadam (cf. [3], theorem 7 and cf. [4], theorem 6).

Remark 3. Theorem 2 holds good for generalised integers $\{l_n\}$ also, that is, if $F(x)$ and $G(x)$ are functions of a real variable $x \geqslant 1$, then

$$G(x) = \sum_{l_n^k = x} F\left(\frac{x}{l_n^k}\right) \iff F(x) = \sum_{l_n^k = x} \mu(l_n)\, G\left(\frac{x}{l_n^k}\right).$$

In case $k = 1$ this theorem reduces to a theorem established by HORADAM (cf. [5], theorem 3).

D. SURYANARAYANA, Waltair, India

REFERENCES

[1] E. COHEN, *Arithmetical Functions Associated with the Unitary Divisors of an Integer*, Math. Zeit. *74*, 66–80 (1960).

[2] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed. (Oxford 1965).

[3] E. M. HORADAM, *Arithmetical Functions of Generalised Primes*, Amer. Math. Monthly *68*, 626–629 (1961).

[4] E. M. HORADAM, *Arithmetical Functions Associated with the Unitary Divisors of a Generalised Integer*, Amer. Math. Monthly *69*, 196–199 (1962).

[5] E. M. HORADAM, *The Order of Arithmetical Functions of Generalised Integers*, Amer. Math. Monthly *70*, 506–512, (1963).

Aufgaben

Aufgabe 634. Es seien f, g zwei im Intervall $[a, b]$ im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbare reellwertige Funktionen mit $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant c > 0$ für alle $x \in [a. b]$. Ferner seien p, q reelle Zahlen mit $0 < p < 1$, $q < 0$, $1/p + 1/q = 1$. Man leite die «Gegenform zur Hölderschen Ungleichung»

$$\int_a^b f\, g\, dx \geqslant \left(\int_a^b f^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b g^q\, dx\right)^{1/q}$$

direkt aus der gewöhnlichen Hölderschen Ungleichung her. H. Hadwiger, Bern

Lösung: Die auf die vorliegende Aufgabenstellung zugeschnittene Form der gewöhnlichen Hölderschen Ungleichung besagt: Sind F, G in $[a, b]$ im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbare reellwertige Funktionen mit $F(x) \geqslant 0$, $G(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt für alle reellen r, s mit $r > 1$ und $1/r + 1/s = 1$:

$$\int_a^b F G\, dx \leqslant \left(\int_a^b F^r\, dx\right)^{1/r} \left(\int_a^b G^s\, dx\right)^{1/s}. \qquad (*)$$

Setzen wir $r = 1/p$, $s = -q/p$, so ist nach den Voraussetzungen der Aufgabe (über p, q) $r > 1$ sowie $1/r + 1/s = p - p/q = p\,(1 - 1/q) = 1$ erfüllt. Wählen wir weiter $F = (fg)^p$, $G = g^{-p}$, so genügen auch F und G nach den (über f, g) gemachten Voraussetzungen den für die Gültigkeit der gewöhnlichen Hölderschen Ungleichung hin-