

# Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **25 (1970)**

Heft 5

PDF erstellt am: **25.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

Diese letzte Tatsache legt die Frage nahe, ob es sogar eine Funktion  $f \in \mathcal{F}[a, b]$  gibt, für die  $\mathcal{H}[f]$  dicht ist in  $[a, b]$ . Bislang konnte ich jedoch dieses Problem nicht entscheiden.

Es mag noch eine Verallgemeinerung des beschriebenen Rekursionsverfahrens zur Gewinnung der  $F_k$  angegeben werden.

Dazu gehe man von einer streng monoton gegen Null konvergierenden Zahlenfolge  $a_l$  mit  $a_1 = 1$  aus und definiere ausgehend von  $F_0 = F$

$$F_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{l} F_{k-1} \left( \frac{x - a_{l+1}}{a_l - a_{l+1}} \right) & \text{für } a_{l+1} \leq x \leq a_l \text{ und } l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Die so gegebenen  $\mathcal{H}[F_k]$  besitzen ganz analoge Eigenschaften wie im behandelten Fall  $a_l = 1/l$ . Ausserdem wächst  $\mathcal{H}[F_k]$  für  $k \rightarrow \infty$  «um so stärker» an, «je langsamer»  $a_l$  gegen Null konvergiert.

FRANÇOIS FRICKER, Basel

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] GELBAUM-OLMSTED, Counterexamples in Analysis (Holden-Day Inc., San Francisco 1964).

## Kleine Mitteilungen

### A New Condition for Consecutive Primitive Roots of a Prime

In [1] we have shown that if  $p > 3$  is a prime such that  $\varphi(p-1)/(p-1) > 1/3$  then there is at least one pair of consecutive primitive roots modulo  $p$ . In this note we shall give a new condition that there be consecutive primitive roots for primes of the form  $4n+1$ .

**Theorem 1.** If the prime  $p = 4n+1$  has 2 as a primitive root then there is at least one pair of consecutive primitive roots modulo  $p$ .

*Proof.* If  $g$  is a primitive root of a prime  $p$ , then the congruence  $gx \equiv 1 \pmod{p}$  has  $x \equiv g^{p-2}$  for its unique solution; since  $(p-2, p-1) = 1$ ,  $x$  is also a primitive root of  $p$ . If  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , it is well known that if  $g$  is a primitive root of  $p$ , then so is  $-g$ .

Let  $p = 4n+1$  be a prime and 2 a primitive root of  $p$ . Then  $-2$  is also a primitive root and the congruence  $(-2)g \equiv 1 \pmod{p}$ , has a primitive root  $g$  for its solution. It follows then that  $2(g+1) \equiv 1 \pmod{p}$ , so that  $g+1$  is also a primitive root of  $p$ .

The following theorem may also be of interest here.

**Theorem 2.** If the prime  $p = 4n+1$  has exactly one pair of consecutive primitive roots, then 2 is a primitive root of  $p$ .

*Proof.* Let  $0 < g < g+1 < p$  be consecutive primitive roots of  $p$ . Then  $0 < p-(g+1) < p-g < p$  are also consecutive primitive roots of  $p$ . Since there is exactly one pair of consecutive primitive roots of  $p$ , we obtain  $p-(g+1) = g$ , or  $(-2)g \equiv 1 \pmod{p}$ . Thus  $-2$ , and hence 2, is a primitive root of  $p$ .

EMANUEL VEGH, U.S. Naval Research Laboratory, Washington, D.C.

#### REFERENCE

- [1] E. VEGH, *Pairs of Consecutive Primitive Roots Modulo a Prime*, Proc. Am. Math. Soc. 79, 1169-1170 (1968).

### A property of the Unitary Analogue of Ramanujan's Sum

A divisor  $d > 0$  of the positive integer  $n$  is called unitary if  $d\delta = n$  and  $(d, \delta) = 1$ . We write  $d \parallel n$ . For integers  $a, b, b > 0$ , let  $(a, b)_*$  denote the greatest divisor of  $a$  which is a unitary divisor of  $b$ . ECKFORD COHEN ([1], § 2) defined the unitary analogue  $c^*(m, n)$  of Ramanujan's Sum as

$$c^*(m, n) = \sum_{\substack{1 \leq x \leq n \\ (x, n)_* = 1}} e(mx, n), \quad (1)$$

where  $e(m, n) = \exp(2\pi i m/n)$ , and established that

$$c^*(m, n) \text{ is multiplicative as a function of } n, \quad (2)$$

$$\varphi^*(n) \equiv c^*(0, n) = \sum_{d \parallel n} d \mu^*(n/d), \quad (3)$$

$$\mu^*(n) \equiv c^*(1, n) = (-1)^r, \quad (4)$$

where  $r$  is the number of distinct prime factors of  $n$ .

Further, he established the following evaluation of  $c^*(m, n)$ :

$$c^*(m, n) = \sum_{\substack{d \mid m \\ d \parallel n}} d \mu^*(n/d). \quad (5)$$

In this note, we establish the following:

**Theorem.**  $c^*(m, n) = \frac{\varphi^*(n) \mu^*(n/a)}{\varphi^*(n/a)}$ , where  $a = (m, n)_*$ .

*Proof.* Since  $a$  is the greatest divisor of  $m$  which is a unitary divisor of  $n$ , we can write  $n = aN$ , where  $(a, N) = 1$ . By (5), we have

$$c^*(m, n) = \sum_{d \parallel a} d \mu^*(n/d) = \sum_{\substack{cd = a \\ (c, d) = 1}} d \mu^*(aN/d) = \sum_{\substack{cd = a \\ (c, d) = 1}} d \mu^*(cN).$$

Now,  $(a, N) = 1$  and  $cd = a$  imply that  $(c, N) = 1$ ; so that by (2), (3) and (4),

$$c^*(m, n) = \sum_{\substack{cd = a \\ (c, d) = 1}} d \mu^*(c) \mu^*(N) = \mu^*(N) \sum_{d \parallel a} d \mu^*(a/d) = \mu^*(N) \varphi^*(a).$$

Since  $n = aN$  and  $(a, N) = 1$ ,  $\varphi^*(n) = \varphi^*(a) \varphi^*(N)$ , so that

$$c^*(m, n) = \frac{\varphi^*(n) \mu^*(N)}{\varphi^*(N)} = \frac{\varphi^*(n) \mu^*(n/a)}{\varphi^*(n/a)}.$$

Hence the theorem follows.

D. SURYANARAYANA, Andhra Univ. Waltair, India

#### REFERENCE

- [1] E. COHEN, *Arithmetical Functions Associated with the Unitary Divisors of an Integer*, Math. Zeit. 74, 66–80 (1960).

## Aufgaben

**Aufgabe 607.** Sind  $X$  und  $Y$  Teilmengen einer Menge  $M$ , so definieren wir  $X + Y$  durch  $X + Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ , d.h.  $X + Y$  besteht aus all den Elementen von  $M$ , die in  $X$  oder  $Y$ , jedoch nicht im Durchschnitt von  $X$  und  $Y$  liegen. Es sei nun  $M$  eine endliche Menge mit  $|M| = n$  Elementen. Ferner sei  $k$  eine gerade ganze Zahl mit  $2 < k \leq n - 1$ . Zeige: Es gibt  $n - 1$  Teilmengen  $B_1, \dots, B_{n-1}$  von  $M$  mit den Eigen-