

# Über Krümmungen höherer Ordnung in den Scheitelpunkten einiger ebener Kurven und deren konstruktive Auswertung

Autor(en): **Schröder, Eberhard**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **25 (1970)**

Heft 1

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-27348>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Damit sind nach dem Hilfssatz in Nr. 5 alle Möglichkeiten erschöpft, und das Endergebnis lautet:

*Durch jede Viviani-Kurve lässt sich eine einzige reguläre Kreisringfläche  $\Psi$  legen; ihr Mittenkreis hat einen Halbmesser, der gleich dem eineinhalbfachen Meridianhalbmesser ist.*

Auf die durch eine Viviani-Kurve  $v$  legbaren *Dupinschen Zykliden* soll an anderer Stelle eingegangen werden. Je zwei dieser Flächen, zu denen auch unsere spezielle Kreisringfläche  $\Psi$  gehört, sind im Bezug auf die Trägerkugel von  $v$  invers.

JOSEF KRAMES, TH Wien

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] E. KRUPPA, *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie*, Wien 1957, §§ 28 und 85.  
 [2] W. WUNDERLICH, *Darstellende Geometrie I*, B-I-Hochschultaschenbücher 96, 96a, Mannheim, S. 173.

## Über Krümmungen höherer Ordnung in den Scheitelpunkten einiger ebener Kurven und deren konstruktive Auswertung

Die Darstellung ebener Kurven durch Stützfunktionen und ihre ersten Ableitungen erweist sich für differentialgeometrische Untersuchungen z. B. an Eilinen, bei denen die erforderlichen Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllt sind, als vorteilhaft. Im folgenden soll diese Darstellungsweise auf Kegelschnitte angewandt werden, wobei ein Brennpunkt als Pol der Stützfunktion fungieren soll. So gestaltet sich die Einführung der Stützfunktion besonders einfach, weil die auf einen Brennpunkt eines Mittelpunktskegelschnittes bezogene Fusspunktkurve mit dem Hauptscheitelkreis des Kegelschnittes identisch ist. Bei der Parabel fällt die auf den Brennpunkt bezogene Fusspunktkurve mit der Scheiteltangente zusammen.

Für die folgenden Rechnungen werde der Brennpunkt des darzustellenden Kegelschnittes in den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems gelegt. Ferner sei der Hauptscheitelkreis durch die Gleichung

$$(x - t)^2 + y^2 = (s - t)^2$$

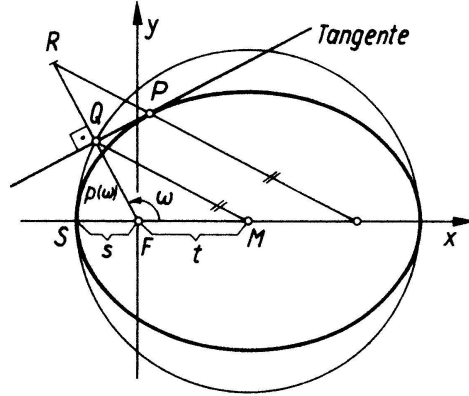
gegeben.

Von den Parametern  $s$  und  $t$ , deren geometrische Bedeutung aus Bild 1 ersichtlich ist, werde vorausgesetzt:  $s < 0$ ,  $s \neq t$ ,  $2t$ . Wendet man auf das Dreieck  $FMQ$  den Cosinus-Satz der ebenen Trigonometrie an, erhält man nach elementarer Umformung für die Stützfunktion die Darstellung

$$p(\omega) = t \cos \omega - W \quad \text{mit} \quad W = \sqrt{s^2 - 2st + t^2 \cos^2 \omega}. \quad (1)$$

Unter Beibehaltung des in Figur 1 eingeführten Achsenkreuzes werde die analytische Darstellung des Kegelschnittes auf die entsprechend orientierte Gaußsche Zahlenebene bezogen. Man erhält so eine komplexe Funktion des reellen Parameters  $\omega$  der Gestalt

$$z(\omega) = (\rho + i \rho') e^{i\omega} = t - (W + i W') e^{i\omega}. \quad (2)$$



Figur 1

Ferner gilt für die  $n$ -te Evolute  $E_n$  ganz allgemein die Darstellung

$$E_n = z(\omega) - e^{i\omega} \sum_{k=0}^{n-1} i^k r_k \quad \text{mit } r_k = \rho^{(k)}(\omega) + \rho^{(k+2)}(\omega). \quad (3)$$

Für  $r_0 = \rho + \rho''$  ergibt sich in vorliegendem Fall

$$\rho + \rho'' = - \frac{s(s-2t)(s-t)^2}{W^3}. \quad (4)$$

Trägt man diese Grösse auf der zugehörigen Kurvennormalen gemäss der durch (3) aufgeprägten Orientierung ab, führt dies auf den entsprechenden Punkt der ersten Evolute. Aus (4) ergeben sich unter Verwendung der an Kegelschnitten üblichen Bezeichnungsweise

$$s = -a + e \quad \text{und} \quad t = e \quad (5)$$

für die Radien der Scheitelkrümmungskreise ( $\omega = \pi$  und  $\omega = 3/2 \pi$ ) die zu erwartenden Ausdrücke

$$r_0(\pi) = \frac{a^2 - e^2}{a} \quad \text{bzw.} \quad r_0\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - e^2}}$$

(im Fall der Ellipse). Die erste Ableitung von (4) liefert

$$\rho' + \rho''' = \frac{3}{W^3} s t^2 (t-s)^2 (2t-s) \sin \omega \cdot \cos \omega.$$

Der Krümmungsradius der ersten Evolute verschwindet hiernach für  $\omega = k\pi/2$  mit  $k = 1, 2, 3, 4$ . Dies bestätigt, dass die erste Evolute Spitzen in ihren den Scheiteln des Kegelschnittes zugeordneten Punkten aufweist. Die zweite Ableitung von (4) führt auf eine Darstellung für den Krümmungsradius der zweiten Evolute als Funktion von  $\omega$ .

Sie lautet:

$$\rho'' + \rho''' = \frac{-3}{W^7} (s^2 - 2st)(s-t)^2 t^2 \{5t^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega + W^2 (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega)\} \quad (6)$$

Setzt man darin  $\omega = \pi$  bzw.  $\omega = 3\pi/2$ , so folgt mit den in (5) eingeführten Bezeichnungen für die den Scheiteln zuzuordnenden Krümmungsradien der zweiten Evolute:

$$r_2(\pi) = \frac{3(a^2 - e^2)e^2}{a^3} \text{ bzw. } r_2\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{3a^2 e^2}{(a^2 - e^2)^{3/2}}$$

(im Fall der Ellipse). Für die folgenden Betrachtungen werde der Scheitelpunkt  $S$  und die Grösse

$$\rho(\omega) + \rho''(\omega) = -\frac{s(s-2t)}{s-t}$$

(Radius des Scheitelkrümmungskreises) festgehalten. Dagegen soll der Mittelpunkt  $M$  des Scheitelkreises in seiner Lage auf der allen Kegelschnitten des Büschels gemeinsamen Achse variieren, und es interessiert die Zuordnung, welche zwischen  $M$  und dem auf  $S$  bezogenen Punkt  $E_3$  der dritten Evolute besteht.

Die weiteren Rechnungen orientieren wir auf einen in der gemeinsamen Achse liegenden Zahlenstrahl mit  $S$  als Nullpunkt. Darauf werde dem Punkt  $M$  die Koordinate  $X_1$  und dem Punkt  $E_3$  die Koordinate  $X_2$  zugeordnet. Setzt man ausserdem

$$r_0 = -\frac{s(s-2t)}{s-t}, \text{ so gilt } X_1 = s-t \text{ und } X_2 = r_0 \frac{s^2 - 2st - 2t^2}{(s-t)^2}.$$

Die Punktreihen  $\{M\}$  und  $\{E_3\}$  sind folglich durch eine projektive Verwandtschaft in vereiniger Lage miteinander verknüpft, welche durch die Gleichung

$$X_1 X_2 + 2r_0 X_1 - 3r_0^2 = 0 \quad (7)$$

beschrieben wird.

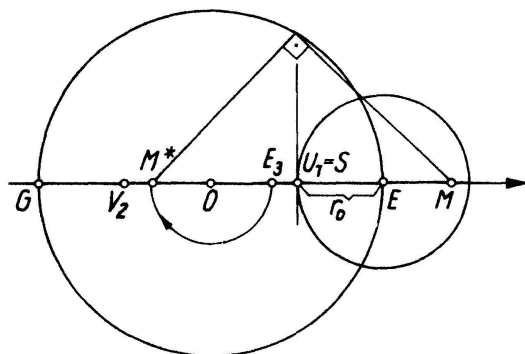
$\{M\}$  und  $\{E_3\}$  bilden auf der gemeinsamen Trägergeraden entgegengesetzt laufende Punktreihen mit sich selbst entsprechenden Punkten bei  $E = r_0$  und  $G = -3r_0$ .

Die Gegenpunkte dieser Projektivität liegen bei  $U_1 = 0$  und  $V_2 = -2r_0$ .

Daraus resultiert für die Potenz dieser Projektivität

$$\overline{U_1 X_1} \cdot \overline{V_2 X_2} = 3r_0 \quad (8)$$

und die Charakteristik der Projektivität  $\delta = -1/3$ .



Figur 2

Ferner lässt sich aus Gleichung (7) und (8) die in Figur 2 angegebene Konstruktionsvorschrift für ein Paar einander zugeordneter Punkte auf der dem Kegelschnittbündel gemeinsamen Achse ableiten. Die gefundenen Ergebnisse werden in folgendem Satz zusammengefasst:

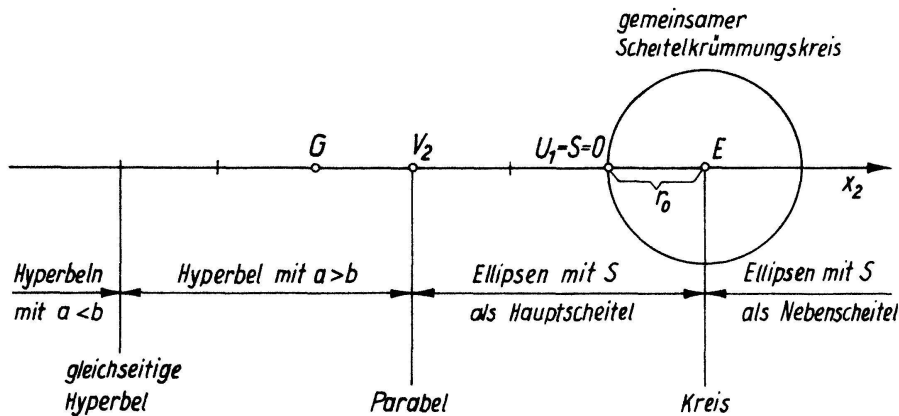
Für ein Bündel von Kegelschnitten mit gemeinsamen Scheitelpunkt  $S$  und Scheitelkrümmungskreis  $\kappa$  besteht auf der diesen Kegelschnitten gemeinsamen Achse eine projektive Punktverwandtschaft zwischen den Mittelpunkten  $M$  dieser Kegelschnitte und den auf  $S$  bezogenen Punkten  $E_3$  der dritten Evoluten.

Die Punktverwandtschaft wird durch Gleichung (7) beschrieben.

Wesentliche metrische Aussagen über die Kegelschnitte des Bündels lassen sich bei variabler Lage von  $E_3$  bezüglich des gemeinsamen Scheitelkrümmungskreises wie folgt zusammenfassen:

Lage von $E_3$ bezüglich des Scheitelkrümmungskreises $\kappa$	Art des zugeordneten Kegelschnittes
$X_2 > r_0$	Ellipsen mit $S$ als Nebenscheitel
$X_2 = r_0$	Kreis (identisch mit dem Scheitelkrümmungskreis $\kappa$ )
$-2r_0 < X_2 < r_0$	Ellipsen mit $S$ als Hauptscheitel
$X_2 = -2r_0$	Parabel
$X_2 < -2r_0$	Hyperbeln

Gilt speziell  $X_2 = -5r_0$ , liegt eine gleichseitige Hyperbel vor. In den sich selbst entsprechenden Punkten  $E$  und  $G$  fällt der Mittelpunkt des Kegelschnittes mit dem auf  $S$  bezogenen Punkt der dritten Evolute zusammen. Im ersten Fall handelt es sich um einen Kreis und im zweiten Fall um eine Hyperbel, deren Achsen die Proportion  $a : b = \sqrt{3} : 1$  erfüllen (Figur 3).



Figur 3

Die hier gefundene projektive Punktverwandtschaft soll bei näherungsweise Konstruktion der Biegelinie eines auf Druck belasteten homogenen Stabes der Länge  $l_0$  angewendet werden. Entsprechend dem in Bild 4 vorgelegten Belastungsfall lautet die Differentialgleichung der Biegelinie:

$$y'' + \mu y (1 + y'^2)^{3/2} = 0 \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{P}{EJ} \quad \text{und} \quad P = \frac{EJ\pi^2}{l_0^2}. \quad (9)$$

Für den Scheitelpunkt der Biegelinie gelten die Bedingungen

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = d \quad \text{und} \quad y'\left(\frac{l}{2}\right) = 0.$$

Daraus resultiert durch Einsetzen in die Differentialgleichung und ihre weiteren Ableitungen:

$$y''\left(\frac{l}{2}\right) = -\mu d, \quad y'''\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \quad \text{und} \quad y''''\left(\frac{l}{2}\right) = \mu^2 d (1 - 3\mu d^2). \quad (10)$$

Weiterhin lassen sich die höheren Ableitungen durch die Krümmungsradien dieser Kurve und ihrer ersten und zweiten Evolute – auf den Scheitelpunkt der Biegelinie bezogen – ausdrücken. Es bestehen die Gleichungen:

$$y''\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{r_0}, \quad y'''\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{r_1}{r_0^2}, \quad y''''\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{r_0^3} (3r_0^2 + 3r_1^2 - r_0 r_2). \quad (11)$$

Aus dem Vergleich der Darstellungen (10) und (11) für die höheren Ableitungen folgt:

$$r_0 = -\frac{1}{\mu d}, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = -\frac{1}{\mu^2 d^3}, \quad r_0^2 = -dr_2. \quad (12)$$

Die Krümmungsradien  $r_0$  und  $r_2$  sind auf der Kurvennormalen von  $S$  bzw.  $E_1$  aus gemäss der Darstellung (3) für die  $n$ -te Evolute abzutragen. Allgemein stellt ein Schmiegekegelschnitt an eine Kurve eine Hyperbel, Parabel, Ellipse dar, falls für die ersten drei Krümmungsradien beziehentlich folgende Bedingung gilt:

$$9r_0^2 + 4r_1^2 - 3r_0 r_2 \leq 0. \quad (13)$$

Setzt man darin die in (9) und (12) angeführten Grössen ein, folgt für die Art des im Scheitelpunkt von 5. Ordnung berührenden Schmiegekegelschnittes

$$\sqrt{3} \pi d - l_0 < 0 \quad \text{Hyperbel},$$

$$\sqrt{3} \pi d - l_0 = 0 \quad \text{Parabel},$$

$$\sqrt{3} \pi d - l_0 > 0 \quad \text{Ellipse mit } S \text{ als Hauptscheitel}.$$

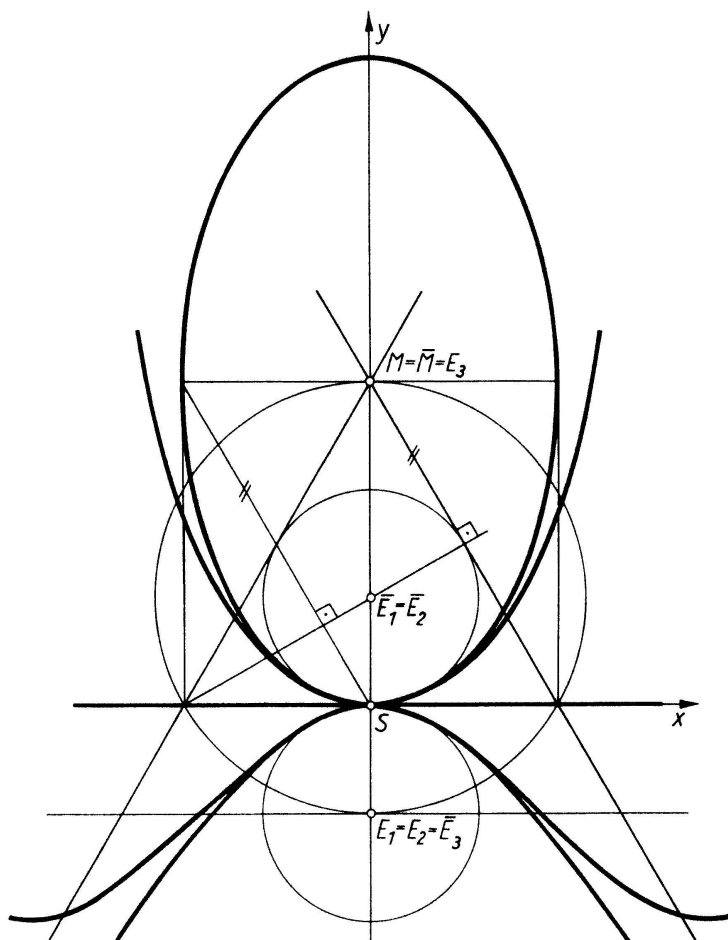
Hierin bedeuten  $d$  die Auslenkung des Stabmittelpunktes  $S$  aus der entspannten Lage und  $l_0$  die Länge des unverformten Stabes, also zwei der Messung unmittelbar zugängliche Grössen.

Bei näherungsweise Berechnung der Biegelinie wird i.allg. das Glied  $y'^2$  der Differentialgleichung als vernachlässigbar klein gegen 1 angesehen. Die Rechnung führt unter dieser vereinfachenden Annahme auf eine Sinuslinie. Da diese Kurve jedoch nur Hyperbeln als Schmiegekegelschnitte zulässt, die in Bezug auf die Wendepunkte in doppelt zählende Geraden, nämlich die zu diesen Punkten gehörigen Wendetangenten zerfallen, dürfte die Beschreibung der Biegelinie für  $\sqrt{3} \pi d > l_0$  durch eine Sinuslinie eine kaum brauchbare Annäherung sein.

Figur 4 zeigt die Konstruktion des Schmiegekegelschnittes im Scheitelpunkt der Biegelinie aus den Grössen  $l_0$  und  $d$  für den Fall  $\sqrt{3} \pi d > l_0$  unter Ausnutzung der zwischen  $M$  und  $E_3$  bestehenden projektiven Punktverwandtschaft. Der Kegelschnitt nähert die tatsächliche Biegelinie im Scheitelpunkt von 5. Ordnung an, während die



Dieses Ergebnis zeigt, dass die beiden Schmiegekegelschnitte einen gemeinsamen, von  $c$  unabhängigen Mittelpunkt und gemeinsame Achsen haben. Die Diagonalen des Achsenrechtecks der Ellipse (Schmiegekegelschnitt der Kettenlinie in  $S$ ) sind zugleich die Asymptoten der Hyperbel (Schmiegekegelschnitt der Cosinus-Linie in  $S$ ). Im Fall  $c = 1$  gilt für das Achsenverhältnis  $a : b = \sqrt{3} : 1$  (Bild 5).



Figur 5

Für  $c = 1/\sqrt{3}$  ist der Schmiegekegelschnitt an die Kettenlinie ein Kreis mit dem Radius  $r = 3$  und an die Cosinus-Linie eine gleichseitige Hyperbel. Die zwischen den Krümmungsradien und Schmiegekegelschnitten der beiden Funktionen bestehenden Wechselbeziehungen resultieren aus der Gleichung  $\cos c x = \cosh c i x$ .

EBERHARD SCHRÖDER, TU Dresden

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] PH. WEINMEISTER, *Über höhere Evoluten*. Sitzungsber. und Abhandl. der Isis, Sektion Mathematik 1910, S. 113–119.
- [2] H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven* (Götschen-Verlag, Leipzig 1908), S. 7.
- [3] K. STRUBECKER, *Differentialgeometrie I, Kurventheorie der Ebene und des Raumes* (de Gruyter, Berlin 1964), S. 120.
- [4] M. LINDOW, *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (Verlag B. G. Teubner, Leipzig 1951), S. 71–73.